基础数学讲义之一

《基础代数学》

项武义

香港科技大学数学系

目录

代序

<节录：第四届苏步青数学教育奖颁奖会的演讲讲义>

精简实用、平实近人、引人入胜
——论基础数学教育之本质与精要

在即将来临的廿一世纪，科技与智力在总体国力中将居于主导成份。因此，科教乃是兴国必经之途，而基础教育的优良素质则是立国的根本。再者，在中、小学的素质教育中，基础数学教育乃是启发脑力和培训解析思维的主要学科。自古以来，它也一直是教导学生善于认识问题、善于解决问题的最佳园地。相传在古希腊雅典柏拉图学院的门前，曾书有：「不懂几何学者不得入」的字句。这其实就是当年的教育家们对于数学教育的基本重要性的一种体认，数学是学习和研究科学与技术不可或缺的基本工具。但是数学在科技和工程上的应用还只能说是「小乘应用数学」，而基础数学在教育上的用场才是「大乘应用数学」。在佛学中：「小乘独善其身，大乘普渡众生。」基础数学教育乃是普渡众生，成为善于认识问题、善于解决问题者的不二法门。

显然，上述普渡众生的任务也给基础数学教育提出了高素质、高效力的要求，而这也就是我们从事数学教育的播种者与耕耘者，所要集思广益、钻研实践，才能克成其功者。今天我想和各位志同道合的新、老朋友们，从基础数学教育的本质和精要所在，来谈一谈如何把它教得精简实用、平实近人和引人入胜。我觉得唯有如此，基础数学教育才能真正做到普渡众生，并且大幅度地提升国民的思维素质和创造能力。

现在，让我们从下列几点来讨论上述话题：

I. 基础数学的源起与本质

概括地说，人类文明对于大自然的认知和理解的进化过程是由定性层面向定量层面深化。例如先定性地认识到我们所在的大地乃是一个大球，然後再进而估计和测量地球的大小。基础数学的起源就是上述认知定量化的自然产物，而基础数学本身的进程则可以大体简述如下:

(i) 数系的构造与逐步扩充：例如自然数系、整数系和分数系；这乃是算术的范畴。

(ii) 由算术进步到代数的关键在于数系运算律的系统运用，亦即以通性求通解。

(iii) 几何学乃是人类对于其所在的空间本质的认知的逐步深化，其演进过程大体如下：

实验几何→定性平面几何→定量平面几何→立体几何→坐标解析几何→向量几何。

(iv) 解析几何乃是代数与几何的自然结合。由此再产生研讨变量问题的基础理论——微分与积分——则是水到渠成、顺理成章的更上一层楼。

现在让我们再来看一看上述基础数学的本质是什麼。归根究底，代数的根本在于数的运算和运算律；几何的根本在于空间的基本结构和基本性质，例如连结于两点之间的直线段乃是两点之间的唯一最短通路，这就是空间的基本结构，而空间对于任给平面的反射对称性则是空间的基本性质；微分和积分运算则是函数的「变率」和「求和」的解析表述和有效计算，它们也就是分析变量问题的基础理论。总之它们的本质都是精简朴实的，它们的根源都是自然而且富有直观内含的。其实，上述简朴、平实、近人的本质也就是为什麼基础数学教育，自古以来一直是锻链脑力、培养思维能力的「益智游乐园」。因此，在基础数学的教育中必须随时随地充分体现它精简实用、平实近人的本质，才能发挥其启发脑力、培训思维的功效，真正成为普渡众生的慈航。

II. 精中求简、以简御繁、至精至简

基础数学的范畴，自然也随著科学文明的篷勃进展而逐步扩张。例如在古希腊到了高级学府柏拉图学院才要求的几何学，在现代已经成为中学数学中，人人必学的基本学科。而且年轻的学生们还要同时学习各种各样的其他学科。学生负担过重的确是现代教育中一个亟待宽解的重大问题，而要减轻学生的负担则必须要简化教学题材！但是如何把基础数学的教材简化呢？却又是众说纷芸、莫衷一是。在这方面基本上可以归纳为下述两种不同的方针和想法：其一是简略的简化法，其二则是「精中求简」。前者的思路是探讨如何对于基础数学的现有题材作适当的加或减来达成简化课程；而後者的思路则是除了简略所有枝节性的题材之外，还要对于基础数学的核心部分，在总体结构上探讨精中求简的出路。我觉得唯有做好精中求简的研究才能真正提高教学质量与效果，也唯有这样，才能使得基础数学易学、好懂、能懂、会用，从而达成减轻学生的负担。

今天限于时间，且以定性平面几何和定量平面几何为例，简约地讨论精中求简的一些具体途径。

(1) 定性平面几何：定性平面几何所要研讨的主题是「全等形」和「平行性」。在本质上，前者乃是平面对于任给直线的反射对称性的具体反映，而後者则是三角形的内角和恒等于一个平角所表达的「平直性」。我们可以由 S.A.S. 叠合公理和上述「内角和」这样两个基本性质为起点，引导学生去研讨等腰三角形和平行四边形的各种各样性质。然後让他们集思广益，共同研讨那些性质已经构成这两种基本图形的特徵性质。亦即让他们自主地、自动地去发现下述两个定性平面几何论证的基本工具：

(A) 等腰三角形的特徵性质：（如 [图–1] 所示）

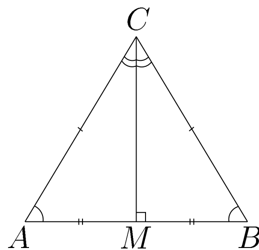
(i) $\overline{CA} = \overline{CB}$（定义）；

(ii) $\angle A = \angle B$；

(iii) $\angle C$ 的分角线 $\overline{CM}$ 垂直底边 $\overline{AB}$；

(iv) 中线 $\overline{CM}$ 垂直底边；

(v) 垂线 $\overline{CM}$ 平分顶角。



[图–1]

(B) 平行四边形的特徵性质：（如 [图–2] 所示）

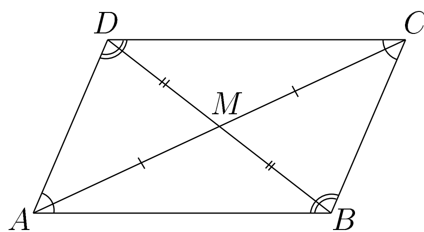
(i) $\overline{AB}//\overline{DC}$ 而且 $\overline{AD}//\overline{BC}$；

(ii) $\overline{AB} = \overline{DC}$ 而且 $\overline{AD} = \overline{BC}$；

(iii) $\angle A = \angle C$，而且 $\angle B = \angle D$；

(iv) $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 互相平分；

(v) $\overline{AB}//\overline{DC}$ 而且 $\overline{AB} = \overline{DC}$ （或 $\overline{AD}//\overline{BC}$ 而且 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ）。



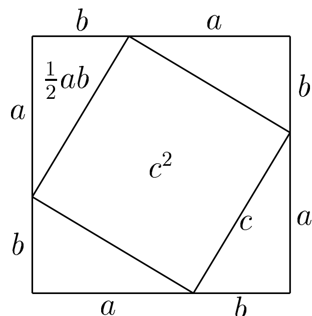
[图–2]

接著引导学生逐步运用上述两个基本工具，一以贯之地论证、解答所有其他平面几何中的定理、例题和习题。其实，等腰三角形的特徵性质之间的转换是充分体现了对称性的具体用法，而平行四边形的特徵性质之间的转换则是充分体现了平行性的作用和表现。这样的教学途径，不但可以达成定性平面几何的精中求简，而且也使得学生逐渐学会抓本质，和逐步体认在认知上的「以简御繁」。

(2) 定量平面几何：定量平面几何的基本定理和精要所在乃是三角形面积公式、勾股定理和相似三角形定理。所以定量平面几何教学首务之

要在于简明扼要地推导上述三者，然後引导学生把它们用来解答或论证各种各样定量平面几何的问题。在这里，中国古算中善用面积公式的创见，提供了既简朴又直截了当的途径，其具体做法是以长方形面积等于长乘宽为起点，用熟知的割补推导出三角形面积等于二分之一底乘高。然後用 [图–3] 和 [图–4]，以面积计算推导勾股定理和直角三角形的相似比。

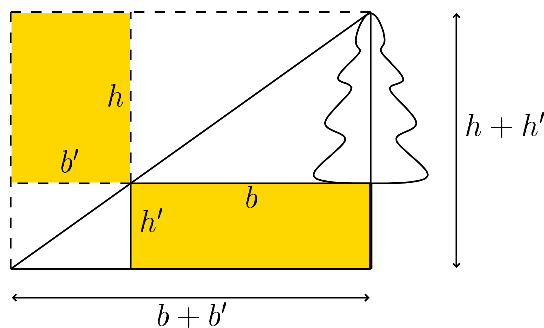
<u>勾股定理</u>：



$$(a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{1}{2}ab \Rightarrow a^2+b^2=c^2$$

[图–3]

<u>出入相补</u>：



$$b\cdot h' = h\cdot b' \Rightarrow \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} \Rightarrow \frac{b+b'}{b'} = \frac{h+h'}{h'}$$

[图–4]

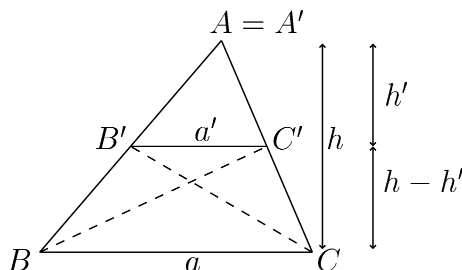
相似三角形定理的面积证法：

[证一]：出入相补所得之比例式

$$\frac{b+b'}{b'}=\frac{h+h'}{h'}$$

其实就是直角三角形的相似形定理。而一般的三角形均可用其垂线分割成两个直角三角形。由此可见，容易结合上述比例式和勾股定理直接推导一般的相似三角形定理。

[证二]：用两种分割法计算 [图–5] 中的梯形面积：



[图–5]

$$\square BCC'B'=\frac{1}{2}ah-\frac{1}{2}a'h',\quad \square BCC'B'=\frac{1}{2}(h-h')(a+a')$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \frac{h}{h'}=\frac{a}{a'}\\
\Rightarrow\quad & \frac{\triangle}{\triangle'}=\frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a'h'}=\left(\frac{a}{a'}\right)\left(\frac{h}{h'}\right)=\left(\frac{a}{a'}\right)^2\\
\Rightarrow\quad & \left(\frac{a}{a'}\right)^2=\left(\frac{b}{b'}\right)^2=\left(\frac{c}{c'}\right)^2=\frac{\triangle}{\triangle'}\\
\Rightarrow\quad & \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}
\end{aligned}$$

[证三]：如 [图–5] 所示，

$$\begin{aligned}
& \triangle BB'C'=\triangle CB'C' \quad \text{（同底同高）}\\
\Rightarrow\quad & \triangle ABC'=\triangle AB'C\\
\Rightarrow\quad & \frac{\triangle ABC'}{\triangle ABC}=\frac{\triangle AB'C}{\triangle ABC}\Rightarrow\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}
\end{aligned}$$

以上只是基础数学中精中求简的二个实例。其实，基础数学教育在各方面精中求简乃是一个大有可为，值得全面探讨的课题。而这方面的探

讨成果，将是一方面大幅提升教学效益而另一方面还可以真正减轻学生负担的改革途径。当然，这还得要由教材的妥为编写，教学方法的全面改进和教育制度能彻底从「应试教育」中解脱出来等等的配合。

总之，我们要集思广益，共同努力把基础数学的各个环节，各种方面都下功夫。精益求精，务必使得基础数学中的精要所在都以至简形式展示在学生面前。这种至精以至简形式展现的「精简合一」，当然就是基础数学能够用来以简御繁的基本道理。其实，这也就是基础数学最能真正引人入胜的地方。

长话短说，基础数学的「至精至简」可以大体上用下述四套运算律来加以总结。即：

1. 集合运算的运算律乃是逻辑思维的至精至简（亦即波尔代数）。
2. 数系运算的运算律乃是代数学的至精至简。
3. 向量运算的运算律乃是几何学的至精至简。
4. 微分积分的运算律乃是分析学（亦即变量数学）的至精至简。

学习基础数学就是要学会有效地、有系统地运用上述四套运算律去解决和认知大自然中的各种各样问题，这也就是以简御繁的具体实践！它们是人类理性文明中的「大巧若拙」，是人人能懂、到处有用的大道理。若能把基础数学教得精到简朴、能懂好用和平实近人，则引人入胜的基础数学是可望可及的。

III. 返璞归真、平实近人、谆谆善诱、引人入胜

基础数学的本质和基本思想都是平实朴素的，而它们的逐步深入和有系统的运用，则又可以用来探索自然、以简御繁、妙用无穷。但是要把基础数学的教学真正做到平实近人、引人入胜，当然还是很有考究的；而其中好多精微细致之处，则著实是耐人寻味、值得推敲。我觉得教者和教材必须要对于基础数学的本质和基本思想下一番深切的返璞归真的功夫，才能把它教得平实近人。再者，在题材编组和教学方式上，要尽可能善导善诱，让同学逐步渐进地体会精简的妙用；要把基础数学不但教得能懂，而且要懂了又能广泛有用，唯有如此才能引人入胜。

让我们且以代数学上的几个实例，来对上述想法作简要的解说：

(1) 解代数方程原理和代数的起源：

从表面的形式来看，初中代数和小学算术的差别在于代数中引进不定元和多项式运算，然後把它们用来解代数方程式、求公式等等。假若我们对于由算术到代数的进化，下一番返璞归真的功夫去细致推敲，就会发现上述进化历程中真正的突破点在于下述简朴的基本思想：

数系的加、乘和指数运算满足一系列普遍成立的运算律。

例如加和乘的交换律、结合律；乘对于加的分配律和指数定则。骤看起来，像

分配律： $m \cdot a + n \cdot a = (m+n) \cdot a$

其所表达的是：m 个 a 之和再加以 n 个 a 之和即为 $(m+n)$ 个 a 之和。像这种本质十分明显的事实，虽然是普遍成立，但是它们会有什麼用场呢？其实，整个代数学所发展的就是有系统、有效力地运用这一系列简朴、普遍成立的数系运算律，去解决各种各样代数问题。此事的具体做法的首次成功就是把运算律用来解代数方程式。而这个用法的基本思想就是下述解代数方程原理：

在各种各样的代数问题之中，最为简朴的类型是某些待解的「未知量」和某些已经给定的「已知量」之间具有某些特定的代数关系。把这些特定的代数关系简明扼要地列述出来，就是一组含有「未知数」符号的代数方程式。所以代数学中最为简朴基本的问题就是如何由一组代数方程式，去确定其中所含的「未知数」所应取之值，这也就是求解代数方程。解代数方程的基本原理究竟是什麼呢？这也就是每一位开始学习代数的学生理当掌握的。它的基本想法是：那些运算律是对于任何数都普遍成立，所以它们对于「未知数」也当然成立、可用。归根究底，解代数方程的基本原理就是有系统地运用运算律把所给的代数方程简化，从而确定其中所含的「未知数」所应取之值，亦即有意识、有系统地达成化未知为已知的目的。解代数方程的原理就是上述极为简朴的思想，而它在解决代数问题上又是那麼简明有力、妙用无穷。当然，在教学上，我们还要谆谆善诱地由简入深，顺理成章

地由二、三元一次方程组，一元二次方程等入门，然後再逐步引导出多项式运算和多项式函数的基本性质和定理。

例如鸡兔同笼问题是一个同学原来已学过的问题，我们可以把它用来作一次温故知新，解说上述原理的用法。鸡数和兔数是待解的未知数，可以用未知数符号 x, y 分别表示之；而头数和足数则是已知量，设其分别是 36 和 108。则它们之间的代数关系就可以用下述代数式简明扼要地表达之，即

$$x + y = 36$$
$$2x + 4y = 108$$

用第一式可得 $y = (36 - x)$，代入第二式，即得

$$(*) \qquad 2x + 4 \cdot (36 - x) = 108$$

若以算术中一成不改按步就班地先算小括号再算中括号的办法就无法再简化 $(*)$–式了，因为小括号中含有未知数！但是只要用上述解代数方程原理，就可以把 $(*)$–式用分配律逐步简化如下，即：

$$\Rightarrow \qquad 2x + 4 \times 36 - 4x = 108$$
$$\Rightarrow \qquad 4 \times 36 - 2x = 108$$
$$\Rightarrow \qquad 4 \times 36 - 108 = 2x$$
$$\Rightarrow \qquad x = (4 \times 36 - 108) \div 2 = 18$$

由此可见，分配律的运用就足以解决算术中括号内含有未知量的困扰，在代数中我们用分配律有系统地简化含有未知量的括式。我们还可以用下述形象的说法来描述这个看来简朴无华而实质上影响深远的进步，即：

> 在算术中基本上不用分配律，乃是数学的石器时代；及至代数，则有系统地运用分配律去简化各种各样代数式和代数关系，这就进步到数学的铜器时代了！

(2) 归纳法和代数公式、代数定理的发现和证明

代数学和几何学有一个本质上的差异。几何学所研讨的空间是我们生活的所在，我们对于它的种种形象和基本性质，与生俱来地有丰富的

感性认识和相当可靠的直观，所以好多几何学上的基本定理如矩形面积公式，相似三角形定理等等是可以直观地看到、想象到它们应该是对的。但是代数学所研讨的是数系的结构和各种各样公式，它们在本质上是逐步归纳、复化所构造而得者，它们的直观性比之于几何就相去甚远了。长话短说，代数学中的公式和定理绝大部分都是用归纳法由低次到高次，由一元，二元到多元逐步归纳而发现，然後再用归纳论证去确立其正确性。因此，归纳乃是整个代数学的基本大法和基本功。但是这里要特别强调，归纳法的内含是归纳地去探索、发现，然後归纳地定义（例如 n 阶行列式用 $(n-1)$–阶行列式加以定义），然後再归纳地论证。唯有这样才是完整的归纳法教学，才真正能做好代数学中，公式和定理的返璞归真，也唯有这样归根究底，才能把代数学教得平实近人。像目下把所要证的公式定理看成书本的宣示，然後加以归纳论证，乃是只教後半段的不完整的归纳法教学，是亟待补正的！

(3) <u>插值法、待定系数法</u>

插值法 (interpolation) 和待定系数法 (method of undetermined coefficients) 是初等代数学的要点和局部制高点，而因式分解则是可以大幅度地加以简略。从初等代数的教学题材的总体分析，我觉得在传统教学中占用大量篇幅的因式分解是可以而且应该大幅度的简略。其实，除了极为简朴的公式如

$$(x^n - a^n) = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

和二项定理之外，绝大部分其他因式分解的公式并无真正的用场。而且大量的因式分解的例、习题也并不能让学生增加代数上的体会和修养。而另一方面，插值法和待定系数法则是充分体现代数学基本精神，而且是非常有用、有力的基本功。但是一般初等代数，甚至于高中代数的教学中，却往往忽略未教，或者只是轻轻带过、未加深入。这种轻重倒置的格局是亟待改正的；而把它改正过来，则是使得初等代数的教学题材在总体上能够真正做到精简实用、引人入胜的基本途径。

再者，插值法的源头其实就是韩信点兵法（西方称之谓中国剩馀定理），而插值法乃是代数学中求公式的根本方法。所以其教学应该从

韩信点兵教起，然後把它用来去求得各种有用的公式如求和公式：

$$
\begin{aligned}
0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) &= S_1(n),\\
0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 &= S_2(n),\\
0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 &= S_3(n),\\
0^4 + 1^4 + 2^4 + \ldots + (n-1)^4 &= S_4(n).
\end{aligned}
$$

插值法的基本原理是：一个待求的 k 次多项式可以由它在 $k+1$ 点所取之值去求解，而待定系数法则是把一个待求的公式中的待定系数转化成一组代数方程式的未知数来求解而得。总之，这两种基本方法是初等代数中普遍有用的想法和算法，理当在初等代数的教学中多用举例说明，逐步深化的手法，引导学生学会其用法，体认其用场。

最後，请允许我向各届获奖的得奖人再一次衷心祝恭，并以下述几句话作为我们珍重再见的祝愿：

愿祖国大地，山永青，水常绿，苗木遍野；
愿我们以播种者，耕耘者，共勉互励。

1999 年 10 月 24 日于上海复旦大学

绪论——大巧若拙的运算律；代数问题与代数方法简介

同学们在初中都已学习过「代数」，例如多项式运算，解代数方程等等。现在让我们来谈一谈代数学的基本思想和基本方法究竟是些什麽？要明确地说明这样一个代数学的本质性问题，当然就得从代数学的起源、代数问题的范例以及代数方法的精要作一次探本究源的工作。这也就是我们今天开始学习「基础代数学」所要研讨的首要课题。

开宗明义，代数学的根源在于代数运算，亦即加、减、乘、除、乘方、开方等等。所有能够用代数运算加以表达的问题都统称之谓代数问题。而代数学 (Algebra) 这门学问所要研讨者就是如何有效、有系统地去解决各种各样的代数问题。代数学中用来解决多种多样的代数问题的基本思想和基本方法究竟是些什麽呢？这就得由数系的代数运算的本质和通性说起了。

代数运算具有一系列普遍成立 (universally valid) 的运算律 (laws of operations)，亦即

加、乘的交换律：$a+b=b+a,\ a\cdot b=b\cdot a$

加、乘的结合律：$a+(b+c)=(a+b)+c,\ \ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

分配律：$(b+c)\cdot a=(b\cdot a)+(c\cdot a)$

指数定则：$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\ (a^m)^n=a^{m\cdot n},\ (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

代数学的基本思想就是有效、有系统地运用这些普遍成立的运算律去解答多种多样的代数问题！由此可见，今天要和同学们一起来做的「代数学寻根之旅」理当由「数系运算律」的寻根做起。

0.1 数系运算律

话说当年，同学们在小学、初中的数学课程中，逐步渐进地学习了逐级扩充的数系运算：由最为原始的自然数系 $\mathbb{N}$（亦即正整数系）起始，到正负整数系 $\mathbb{Z}$；再到正负分数系 $\mathbb{Q}$（亦称为有理数系）；然後在高中再到实数系 $\mathbb{R}$ 和复数系 $\mathbb{C}$。同学们现在应该来回想、温习一下：在上述这一系列逐级扩充的过程之中，每一次扩充究竟添加了那一类「新数」？添加了它们之後的扩张数系比之于原先者究竟又多有了那些好处？再者，所引进的新数之间的运算究竟是如何归结到原有者之间的运算来加以定义的？例如分数运算就是用下列算式归于整数运算加以定义的，即

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q+n\cdot p}{n\cdot q},\quad \frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$$

而复数之间的运算则是用下列算式归于实数运算加以定义的，即

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$$
$$(a+b\sqrt{-1})\cdot(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}$$

对于上述数系的逐级扩充，即

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

作一次总复习乃是每一位同学都应该自动自发地去回想、深究的大好习题。而下这样一番功夫肯定会让你体会到温故知新的得益和乐趣的！

现在让我们先来讨论下述两个问题：

（一）这些看起来简朴得几乎是笨拙的运算律究竟能有多大用场呢？

（二）运算律普遍成立的原由何在？

因为数系运算律是普遍成立而且又是极为简朴易用的算式，所以它们是广泛能用而且简单有力的代数学基本工具。其实，运算律就是整个代数学的基础！但是运算律广大无穷的用场和它们多彩多姿，既简朴又精到的种种用法，则有待在往後的章节以及更进一阶的代数学中逐步、逐样地去开拓、展现它。所以对于第一个问题的回答乃是：「且

听下回和下下回分解。」我们现在要和同学们作比较详细的初步分析的是第二个问题。

在数系逐阶扩张中，我们可以清楚地看到下述两点：第一点、在 $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ 这一串的逐阶扩张中，「後者的运算律之普遍成立」乃是由「前者运算律之普遍成立」推导而得者。第二点、使得运算律在逐步扩张的过程中得以保持其运算律的普遍成立，其实就是每一步扩张的做法的一个指导思想。总之，运算律普遍成立的原由，归根究底就得要仔细考察一下自然数系的运算律为什麽是普遍成立的呢？在这里，也许有些同学会问：$2+3$ 和 $3+2$ 都等于 5；2×3 和 3×2 都等于 6；这岂不是熟知而且极为明显的事实 !? 还有什麽好讨论的？叫人觉得这简直是庸人自扰 !? 但是请大家注意，这种举例说明，或者逐一验证是无法说明运算律是普遍成立的！试问有那一位同学曾经对于三个「百位数」的乘法，真的去验算过结合律是否成立的？显然，这种验算一来极为繁琐、费时而且极易出错；二来于事无补，因为即使费了千牛万虎之力，还是只能对于无穷多个情形之中的小小一角做了验算吧了，是不？由此可见，追根究底地问自然数系运算律为什麽普遍成立——此事绝非庸人自扰，乃是学习代数不可缺的奠基与起步！

这里，我们得先说明一下「证明」这件事的本质。证明者也，乃是用某些事物的正确性去说明其他一些事物的正确性，例如以整数系运算律为基点，可以进而证明分数系运算律的成立。总之，任何论证都必须有所本，证明是不可能「无中生有」的！由此可见，要证明自然数系的运算律，也必须要有所本；而这样一个最、最原始的根本究竟是什麽呢？且让我们来剖析一下自然数系的原始本质吧。

自然数系是我们用来数「个数」的数学工具 (mathematical tool for counting)，它的本质就是一个顺序排列的体系，其起始者为 1，往後顺序地「後者」表示比「前者」多加 1 个。亦即

$$2=1+1,\quad 3=2+1,\quad 4=3+1,\quad 5=4+1,\ \ldots\ldots$$

如此逐个加 1 以至于「无穷」。由此可见，自然数系最、最原始根本的结构就是「$+1$」运算。任何自然数都可以由 1 起始，逐步「$+1$」而达到它。上述对于自然数系本质的朴素的描述也就是通常叫做数学归纳法原理 (Principle of Mathematical Induction) 者也！这也就是我们即将论证自然

数系运算律的所本。其实，认清了上述基本出发点，就不难看到下面关于加法，乘法和乘方的一系列返朴归真的剖析了。

（一）加法是「+1」的复合，例如

$$a+2=(a+1)+1,\quad a+3=(a+2)+1=\big((a+1)+1\big)+1$$

亦即「$+n$」乃是把「+1」连续做 n 次的缩写。所以 $+(n+1)$ 乃是「$+n$」之後再多做一次「+1」者也。改用算式表达，亦即

$$a+(n+1)=(a+n)+1 \tag{0.1}$$

其实，上述算式也就是自然数系的加法运算的归纳定义 (inductive definition)。

（二）乘法是自相加的缩写，例如

$$1\cdot a=a,\quad 2\cdot a=a+a,\quad 3\cdot a=2\cdot a+a=(a+a)+a$$

亦即

$$(n+1)\cdot a=n\cdot a+a \tag{0.2}$$

其实，上述算式和 $1\cdot a=a$ 也就归纳地定义了自然数系中的乘法运算。

（三）乘方是自相乘的缩写，例如

$$a^1=a,\quad a^2=a\cdot a,\quad a^3=a^2\cdot a=(a\cdot a)\cdot a$$

亦即 a^n 乃是 n 个 a 自相乘的缩写，所以

$$a^{n+1}=a^n\cdot a,\quad (a^1=a) \tag{0.3}$$

也就是乘方运算的归纳定义。

由上述逐步归纳定义，我们剖析了自然数系中的加、乘和乘方运算是如何由最、最原始的「+1」逐步归纳组合而成的。由此也就不难想到它们的运算律是可以由它们的归纳定义为起点，逐步地加以归纳论证的。下面只是举三个关键性的归纳论证为例，其他的逐一论证则正好是同学们开始练习归纳论证的自然起点。

(i) <u>加法结合律的归纳证明</u>：

$$(a+b)+c=a+(b+c) \tag{0.4}$$

对于 c 作归纳证明：在起始的 $c=1$ 时，上式就是加法的归纳定义式，即 (0.1)–式。再者，我们归纳地设 (0.4)–式对于 c 成立，从而去论证 (0.4)–式对于 $(c+1)$ 也因而成立。其证明如下：

$$\begin{aligned}
(a+b)+(c+1) &= \big((a+b)+c\big)+1 && [\text{加法定义式}]\\
&= \big(a+(b+c)\big)+1 && [\text{归纳假设}]\\
&= a+\big((b+c)+1\big) && [\text{加法定义式}]\\
&= a+\big(b+(c+1)\big) && [\text{加法定义式}]
\end{aligned}$$

(ii) <u>分配律的归纳证明</u>：

$$m\cdot a+n\cdot a=(m+n)\cdot a \tag{0.5}$$

对于 n 作归纳论证：在起始的 $n=1$ 时，(0.5)–式就是定义式 (0.2)。而 (0.5)–式的归纳论证如下：

$$\begin{aligned}
m\cdot a+(n+1)\cdot a &= m\cdot a+(n\cdot a+a) && [\text{乘法定义式}]\\
&= (m\cdot a+n\cdot a)+a && [\text{加法结合律}]\\
&= (m+n)\cdot a+a && [\text{归纳假设}]\\
&= \big[(m+n)+1\big]\cdot a && [\text{乘法定义式}]\\
&= \big[m+(n+1)\big]\cdot a && [\text{加法定义式}]
\end{aligned}$$

(iii) <u>指数定则 $a^m\cdot a^n=a^{(m+n)}$ 的归纳论证</u>：

在起始的 $n=1$ 时，$a^m\cdot a=a^{m+1}$ 就是定义式 (0.3)。对于 n 的归纳论证如下：

$$\begin{aligned}
a^m\cdot a^{n+1} &= a^m\cdot(a^n\cdot a)=(a^m\cdot a^n)\cdot a\\
&= a^{m+n}\cdot a=a^{(m+n)+1}=a^{m+(n+1)}
\end{aligned}$$

总之，自然数系的加、乘和乘方运算都是由最、最原始的「+1」运算，逐步复合而得者，而 (0.1), (0.2) 和 (0.3)–式分别是它们的归

纳定义式。关于这三种基本代数运算的一系列运算律，则可以逐步地以上述三个归纳定义式为起点，加以归纳证明之！这样就建立起运算律普遍成立这个代数学的基础。这也就是我们学习基础代数学的首务之要：代数学的探源与奠基工作。

接著让我们来谈一谈这些简朴的运算律的用场与用法。概括地说，运算律的用场在于它们是解答各种各样代数问题的基本工具，而其多彩多姿的用法也就是我们将要逐步介绍其梗概的种种代数方法。其实，学习代数学，就是要学会善用运算律去有效、有系统地解决多种多样的代数问题。再者，多彩多姿的代数方法则当然是随著代数问题的拓展与深化而亦步亦趋地发展起来的；新的代数问题往往激发起新的代数方法，而新的代数方法又可以把更多样的代数问题得以系统地理解并且把代数学应用的领域得以拓展。整个代数学就是这样地蓬勃开展起来的。长话短说，下面就让我们先对代数问题和代数方法作一个简短的初步介绍。

0.2 代数问题和代数方法简介

代数问题的范畴既广且深，这里只举几种初等的类型为例。它们在代数学的启蒙与奠基阶段，则扮演著重要的角色。

0.2.1 解代数方程式的基本原理和未知数符号之引入

同学们在小学时学习算术，在初中时进而学习代数。在数学的发展史中，代数乃是由算术进步而得者。现在让我们来剖析一下，从算术到代数的进步，其要点何在？突破点何在？回顾当年，在小学算术中所学的四则应用题，如年龄问题、鸡兔问题等等，大体上来说，当时是通过对于每一类型的问题详加分析，各别地求得其所针对的公式来加以解答的。但是到了初中代数，这些多样的四则题统统都可以用简单的线性方程组加以解答。其中究竟使了什麽「巧妙」呢？骤看起来，其妙处好像在于引进了「未知数」符号 (unknown)。例如在鸡兔问题中，可以用 x, y 分别表示「兔数」与「鸡数」；则所给问题中的数量

关系可以列成两个方程式，即

$$\begin{cases} x+y = \text{头数} \\ 4x+2y = \text{足数} \end{cases}$$

在算术中虽然不用 x, y 这种符号，却也可以同样地写下

$$\begin{cases} \text{兔数} + \text{鸡数} = \text{头数} \\ 4\times\text{兔数} + 2\times\text{鸡数} = \text{足数} \end{cases}$$

由此可见，到此为止，代数和算术根本是毫无本质上的差别。其实，代数解法的真正妙处并不在于引进未知数符号和列方程式，而是在于能够由代数方程去解得未知数所应有的值！现在让我们以头数、足数分别是 15 和 38 为例，来分析一下代数解法和算术解法的差别何在？

(i) 代数解法：用第一式解得 $y = 15 - x$，代入第二式即得

$$4x + 2\cdot(15-x) = 38$$

用分配律将上式简化，即得

$$4x + 30 - 2x = 2x + 30 = 38$$
$$\Rightarrow\ 2x = 38 - 30 = 8\ \Rightarrow\ x = 4$$

(ii) 算术解法：若笼中全部是鸡（即 15 只），则足数应为 $2\times 15 = 30$。今逐一以兔换鸡，则头数保持不变而足数则每次增加 2。由此可见，要使得足数由 30 增加到 38，所需做的更换次数是 $(38-30)\div 2 = 4$。这样就求得兔数 $= 4$。

【比较分析】：在代数解法中，我们用运算律和「移项」即可解得 x, y 所应有之值（化未知为已知！）。而在算术解法中，老师其实早已「心中有式」，即

$$\text{兔数} = \big(\text{足数} - 2\times\text{头数}\big)\div 2$$

然後再用上述这样一套「说词」来解释其合理性。这里也许同学们会问：「那麽老师『心中有式』的上述公式究竟是如何想到的呢？」此事大致有两种途径，其一是用代数方程求解而得，即

$$\begin{cases} x+y = a \\ 4x+2y = b \end{cases}\ \Rightarrow\ 2x + 2(a-x) = b$$

$$\Rightarrow\ 2x = b - 2a\ \Rightarrow\ x = (b-2a)\div 2$$

其二是由实验归纳而得，即

兔数	鸡数	足数
0	a	$2a$
1	$a-1$	$2a+2$
2	$a-2$	$2a+4$
3	$a-3$	$2a+6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

上面所讨论的虽然只是一个简单的实例，但是我们已经可以看到两种解法的真正区别是：在算术中未能有效利用运算律；而代数则有系统地用运算律去简化给定的数量关系，从而化未知为已知。要把这个区别认识得更加清楚一些，请同学们再回想一下，在小学时学习算术四则运算，是不是有一个口诀：「先算小括号，再算中括号，然後算大括号。」总之，在算术四则中，括号是由里及外，逐步去括号来加以计算的，是不？这种算法在括号中含有未知量时，例如 $4x+2\cdot(15-x)=38$，就行不通了；而在代数中，我们可以用分配律把 $2\cdot(15-x)$ 改写成 $30-2x$。这叫做「穷则变，变则通！」

上述「变则通」的原理如下：在算式中的未知数在尚未解出其应有之值之前，虽然不知其值为何，但肯定是一个数，所以那种对于任何数皆普遍成立的运算律是肯定可用的。其中最为有力者是分配律，它使得算式中的括号可去、可加，不会因为某一括号中含有未知量而「受阻」。这也就是解代数方程式的基本原理！这才是算术与代数真正的分野！

可以这麽说，在算术年代，是没学会用分配律的「石器时代」；到了代数，则进步到大用运算律（特别是分配律）的「铜器时代」。在这里，我们还要再谈一谈「引进未知数符号」这个措举的真正好处和意义。

由上述分析可见，解代数方程式的基本原理在于系统地用运算律，把含有未知量的算式加以简化、分析。引进符号如 x, y, z 等来表达未知量的做法就是要把上述原理具体化、形象化；亦即未知数就是那种在运算上满足运算律的符号。这样做，就使得我们在对于「未知量」使用运算律时「有的放矢」（未知数符号是「的」，运算律是「矢」），运用起来自然更能得心应手，是不？再者「代数」这个名词

，顾名思义，乃是因为这种以符号代表未知数等等这种做法在代数学中广泛运用而得其名者也。其实，这种做法真正好处在于使得对于各种各样具有数系通性的事物如未知数、变数、待定系数等等，能够有的放矢地运用运算律，得以正规化、系统化。在中学代数中所学的多项式运算就是这个做法的具体形式。

在中学代数课程中，所学习的单元（或多元）多项式运算，其实就是含有单个（或多个）字母符号的算式之间的运算。那些叫做「元」的符号的本质就是它们在运算上满足运算律（亦即对于任何数皆普遍成立的通性）。例如两个多项式的乘积是用分配律把它归于单项式的乘积之和式来计算，而单项式的乘积则是用乘法的交换律、结合律和指数定则来计算的。所以多项式本质上就是具有运算律的符号所组合而成的代数式。它们之间的代数运算，则就是对于这些符号运用运算律所能做的形式运算。例如

$$
\begin{aligned}
&(x+1)(x-1) = x^2 - 1, \\
&(x^2+x+1)(x-1) = x^3 - 1, \\
&(x^3+x^2+x+1)(x-1) = x^4 - 1, \\
&(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \\
&(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \\
&(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4, \text{ 等等}
\end{aligned}
$$

从下一章开始，我们将会有系统地研讨单元多项式的基础理论，而它的一个重要应用则是它为微分学提供了基础；微分学的本质就是对于一个可微函数描述其多项式函数的局部逼近。

0.2.2 韩信点兵法，善用分配律的启蒙者

在数系的运算律之中，分配律是唯一连结加、乘这两种基本运算者。归本究源，分配律起源于「乘乃是自相加的复合」这个「乘的本质」而且它本身又简明扼要地总结了加、乘之间的关联。在代数学中，我们对于所有运算律当然都不分彼此地一起运用，但是其中以分配律最为重要、有力，而且它的用场和用法上也特别有讲究。在很多基本代数问题的研讨上，是否能够善用分配律往往就是成败的关键。在这一

点上，中国古算中有一个独到的创见，这也就是我们接著要详加剖析的「韩信点兵法」，它也就是在数论中具有基本重要性的「中国剩馀定理」(Chinese Remainder Theorem)。

我们先谈一谈一个引人入胜的传说：话说当年，在楚汉相争的年代，韩信是刘邦的大将。有一天，刘邦亲临韩信的军营，而在兵场上约有二千名士兵在操练。韩信命令士兵们先後以七人一组、十一人一组及十三人一组结集成小组，并把每次馀下不能组成七（或十一、十三）人小组的人数报上，然後他便可以快速地算出士兵的确切数目。例如，在组七人小组时馀下 3 人，组十一人小组时馀下 4 人，组十三人小组时馀下 8 人，韩信很快便算出其确切数目是 1984 人；其後用一个跟著一个点的费时数法确认了人数正是 1984，而且当中更包括一些由刘邦暗中吩咐混入士兵们中的数名近卫军，以防韩信事前已知道士兵数目的可能性。故事我们就只说到这里，接著让我们来讨论上述「韩信点兵法」背後的数学内涵。

韩信点兵法在数学方面的分析：

(i) 设 x 为士兵数目，则当 x 除以 7、11、13 时的馀数便分别是 3、4、8（简称馀数集为 $(3,4,8)$）。首先要注意，上述条件并不能唯一地确定 x 的值，但若两数 x 与 x' 具有相同的馀数集，则两者的差别乃是一个 $7\times 11\times 13 = 1001$ 的倍数。因此，韩信很容易就可以选定其中最接近粗估其人数约为 2000 的那个 x 为答案。

(ii) 设 x_1、x_2、x_3 分别是以 $(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$ 为馀数集而且小于 1001 的解。根据假设 x_1 是 $11\times 13 = 143$ 的倍数，即 $x_1 = 143\cdot y_1$，不难求出 $y_1 = 5$，即得 $x_1 = 715$。同理，$x_2 = 7\times 13\cdot y_2 = 91\cdot y_2$, $y_2 = 4$，即得 $x_2 = 364$； $x_3 = 7\times 11\cdot y_3 = 77\cdot y_3$, $y_3 = 12$，即得 $x_3 = 924$。这些 x_1、x_2、x_3 便是韩信预先早已算妥记得的「胸有成竹」。

(iii) 跟著由分配律可直接得出 $r_1\cdot x_1 + r_2\cdot x_2 + r_3\cdot x_3$ 的馀数集便是 (r_1,r_2,r_3)！其中 $0\le r_1 < 7$, $0\le r_2 < 11$, $0\le r_3 < 13$。在上述例子中，$(r_1,r_2,r_3) = (3,4,8)$，所以韩信很快便能算出 x 的值是 1984。

韩信点兵法的基本想法和启示：

现在让我们来剖析一下「韩信点兵法」的基本想法和这样一个成功范例所展现的启示：

基本想法：在求解剩馀问题时，当馀数之中只有一个是 1，其他皆为 0 的特殊情形，不但容易解答，而且可以用这一系列特殊解，把一般情形的解答简洁地用下述公式表达之。设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是对于给定一组公因数为 1（亦即互质）的除数 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，其馀数组分别是 $(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, \cdots, 0, 1)$ 的特殊解，则

$$x = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_k x_k \tag{0.6}$$

乃是一个馀数组是 $(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 的解。而且任何以 $(r_1, r_2, \cdots, r_k)$ 为馀数组的解和上述 x 相差一个 $a_1 a_2 \cdots a_k$ 的整数倍。上述公式 (0.6) 之所以普遍成立的理由就是分配律。由分配律可见 $r_i x_i$ 被 a_i 除的馀数是 r_i 而且 $x - r_i x_i = \sum_{j \neq i} r_j x_j$ 被 a_i 除的馀数是 0（因为每一个 $r_j x_j, j \neq i$, 都含有因子 a_i）。由此可见，上述算法的基本思想就是善用分配律，把剩馀问题的一般情形，直截了当地归于易解好算的特殊情形来系统解答之。

有鉴于韩信本人乃是楚汉相争时代的大将军，在此不妨借用军事术语来比喻上述基本思想：假如我们把剩馀问题看做「战场的全局」的话，则那些特殊馀数组的解就是能够简明扼要地控制全局的「战略要点」。所以上述分解组合由特殊解去全局控制一般解的想法，的确展现了韩信在认识问题、解决问题上的「大将之风范」。他给後学後进的一般性启示大致如下：

> 「当我们在研讨某一种问题，不宜拘泥也不必局限于原给的问题，而是要把它放到恰到好处的广度和范畴之中去处理。唯有这样才有可能把同类的问题妥加组织（例如在剩馀问题中由分配律的运用所得的 (0.6)–式），然後再用这种组织去实现分解组合系统解答的战略思想。」

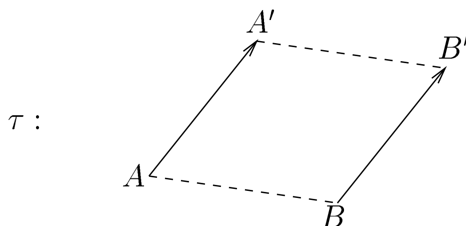
当然，如何对于某一种问题把其相应的广度和范畴选得恰到好处和如何把所选定的全局妥加组织乃是密切相关的。此事一来随著待解的问题而定，二来也有赖于解题者对于该问题的认识深度而定，所以无

法有定规，也难以有一概之论。但是在基础数学中却自然而然地有好些基本常用的问题，也都可以同样地用分配律加以组织，使得一般解和特殊解之间的关系也和 (0.6)–式同样地是一种倍数组合（或称为线性组合）。这一类问题通称之谓线性问题。研究有效解答线性问题，并且拓展其应用的课题则叫做线性代数 (Linear Algebra)，这其实就是我们在大学基础数学课程中所要研讨的一个中心课题，而且它也是在整个数学中一个最广泛有用的精简所在。

总结上面这一段讨论，可以说线性代数的基本想法就是系统地运用分配律去解决各种各样线性问题。而这种善用分配律去解决线性问题的基本方法和思路，业已在韩信点兵法中充分体现、简明扼要地表达得「淋漓尽致」。将来同学们在学习线性代数的起步时刻，当知线性代数的基本方法，实乃起源于中国古算的「中华祖法」。

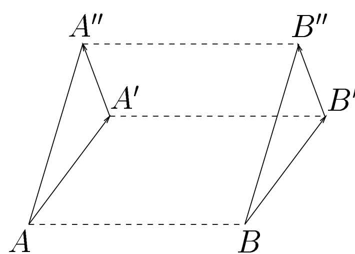
0.2.3 向量代数与空间本质的线性化

上面两小节的讨论，初步说明了分配律在代数学上的重要性。大体上来说，分配律在代数学中的基本重要性是很自然也相当明显的，但是分配律在几何学中也同样具有基本重要性，则是并非显而易见的了。长话短说，在空间中把每个点都作一同向等距的移动（如 [图 0–1] 所示）叫做一个平移（平行移动的简称）。用「平行四边形定理」（亦即一个四边形若有一对对边平行且等长则其另一对对边也平行且等长）即可证明两个平移的组合必定还是一个平移（见 [图 0–2]）。



[图 0–1]

同理也可证两个平移的组合是可交换的，即 $\tau_2 \circ \tau_1$ 和 $\tau_1 \circ \tau_2$ 恒为同一平移。以上述事实为基础，就自然可以把平移的组合看成平移之间的「加法」。而且把它想成一种带有方向成份的量，称之为「位移向量」，往後将用小粗体拉丁字母如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 等表示位移向量。



[图 0–2]

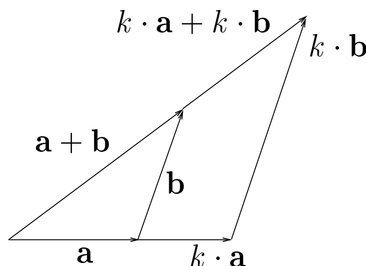
接著我们还可以引进一个向量的倍积 (Scalar Multiplication)，即 $k\cdot\mathbf{a}$ 在 k 是正（或负）实数时乃是那个和 $\mathbf{a}$ 同向（或反向）而且其长度则是 $\mathbf{a}$ 的 $|k|$–倍的位移向量。例如正整数倍 $n\cdot\mathbf{a}$ 其实就是 n 个 $\mathbf{a}$ 自相加的总和，分数倍 $\frac{m}{n}\cdot\mathbf{a}$ 其实就是那个唯一满足 $n\cdot\mathbf{x}=m\cdot\mathbf{a}$ 的向量。由上述倍积的定义，不难看到它满足下列运算律，即

$$k_1\cdot(k_2\cdot\mathbf{a})=(k_1\cdot k_2)\cdot\mathbf{a}$$
$$(k_1+k_2)\cdot\mathbf{a}=k_1\cdot\mathbf{a}+k_2\cdot\mathbf{a}$$

但是另外一个分配律，即

$$k\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\cdot\mathbf{a}+k\cdot\mathbf{b}$$

是否也成立呢？如 [图 0–3] 所示，其实和上述分配律相应的几何事实就是平面几何中极为重要有用的相似三角形定理！所以不但上述倍积分配律是普遍成立的，它本身根本就是相似三角形定理的代数化！



[图 0–3]

一个位移向量 $\mathbf{a}$ 同时具有长度和方向这样两种内含。我们将用 $|\mathbf{a}|$ 表示 $\mathbf{a}$ 的长度，用 $\angle\mathbf{a},\mathbf{b})$ 表示 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 这一对向量的方向差，亦即两者之间的夹角。在平面几何学的研讨中，三角形是既精且简的基本图形

。用向量来表达三角形，则它的三个有向边就可以分别表达成 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$。由平面几何中所熟知的 S.S.S. 叠合条件可见夹角 $\angle\mathbf{a},\mathbf{b})$ 业已被其三边边长 $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ 所唯一确定（亦即馀弦定律）。再者，中国古算中的勾股定理可以改写成

$$\text{若 } \angle\mathbf{a},\mathbf{b}) = \text{直角，则有 } |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

在一般 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 并非互相垂直的情形则 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 \neq 0$。例如当 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 的特殊情形，则有

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 4|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2$$

总之，对于任给两个位移向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$，下述函数

$$f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big\{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\big\} \tag{0.7}$$

是一个值得研讨的几何量。例如 $f(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ 乃是 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 互相垂直的充要条件，而且 $f(\mathbf{a},\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$。所以它显然是一个和 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的长度、夹角都密切相关的几何量。但是归根究底 (0.7)–式所定义的几何量是否真正有用、好用，还得要看它是否具有简洁好用的优良性质。它显然具有对称性，即 $f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = f(\mathbf{b},\mathbf{a})$，而详加研讨的结果会发现它其实还具有下述简洁易算的性质，即

$$f(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = f(\mathbf{a},\mathbf{b}) + f(\mathbf{a},\mathbf{c}) \tag{0.8}$$

上述几何量将是用向量去研讨几何广泛有用的有力工具。在向量代数中，我们索兴把它想成是一种由两个向量求得一个数值的一种<u>乘积</u>，叫做<u>向量的内积</u> (Inner Product) 而且改用符号 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 表达之，亦即以

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\big\{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2\big\} \tag{0.7$'$}$$

为<u>向量内积的定义式</u>。这样做的基本原由就是使得性质 (0.8)–式可以直截了当地改写成

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \tag{0.8$'$}$$

这种分配律的形式，使得它运用起来能够更加得心应手。

总结这一小节的讨论，我们可以用位移向量的加法、倍积和内积简洁自然地把空间的结构全面代数化，而且把定量几何学中的基本定理如相似三角形定理和勾股定理分别转化为倍积和内积的分配律。这也就是为什麼分配律的代数又成为研讨几何学的利器的道理。

0.2.4 线性代数和轨尺作图

在古希腊几何学中，相传有三个待解的轨尺作图难题，一直找不到其解法：

1. 其一是：如何作一正立方体，其体积为一个给定正立方体的两倍？

2. 其二是：如何将一个给定角三等分？

3. 其三是：如何作一正方形和单位圆具有同等面积？

此事世代相传，一直无法解答，一直到近世才真相大白：原来三者都是无法用有限次轨尺作图来达成的！换句话说，古希腊几何学家所寻求的作图法，其实是根本不存在的！而前两个的不存在性的证明乃是运用线性代数的架构，把原本的几何问题转化成代数问题而得以解决的。此事乃是大学线性代数课程的讨论范围，在此则仅作一简明扼要的介绍。

[注]：详细证明请参看附录的讨论。

从定量几何的观点来说，第一个作图题所要达成者是由给定单位长去求作一个长度等于 $\sqrt[3]{2}$ 的直线段，而第二个作图题所要寻求者，则是如何由一个给定角 θ 的正弦 $\sin\theta$（或其馀弦 $\cos\theta$）去作出长度是 $\sin\frac{\theta}{3}$（或 $\cos\frac{\theta}{3}$）的直线段。开宗明义，问题本身并非长度分别是 $\sqrt[3]{2}$ 和 $\sin\frac{\theta}{3}$ 的直线段是否存在，而是它们是否能用有限次的轨尺作图构造而得？由此可见，要证明上述两个作法之「不存在性」，当然就得对于那些可以用有限次轨尺作图构造而得的线段长有一种明确的总体认识！

【分析】：归根究底，在轨尺作图中，逐步所做者不外乎一次次去求 {线、线}，{线、圆} 和 {圆、圆} 的交截。以近代解析几何的观点来表达，那就是求解它们的联立方程式的解点坐标。而其中每次所要求解的方程组的系数，则是原给线段或前面逐次作图所得者的长度。稍加分析，就可以看到 {线、线} 交点的坐标总是可以用系数的四则运算

加以表达；而｛线、圆｝和｛圆、圆｝的交点坐标则可以用系数的四则运算加上平方根的表式来表达之。由此可见，那种可以用有限次轨尺作图求得的长度乃是可以由原给长度，以有限次四则运算和平方根的组合加以表达者。反之，任何能够用给定长度再用上述五种运算的有限次组合加以表达的长度，也都可以用有限次轨尺作图去逐步构造之！

【基本想法与具体做法】：

（一）改用代数的描述。$\sqrt[3]{2}$ 和 $\sin\frac{\theta}{3}$ 分别是下述三次方程式的根，即

$$x^3 - 2 = 0$$
$$4x^3 - 3x + \sin\theta = 0$$

若将 θ 取为 $\dfrac{\pi}{6}(= 30^\circ)$，则有

$$4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$$
$$\text{亦即} \qquad \tilde{x}^3 - 3\tilde{x} + 1 = 0, \quad \tilde{x} = 2x$$

显然 $x^3 - 2$ 和 $\tilde{x}^3 - 3\tilde{x} + 1$ 都是有理系数不可约的三次多项式（因为它们显然没有有理根）。

概括地来说，我们所要论证者，就是像上述不可约三次多项式的根是无法改用有限次二次方程的求根和四则组合来表达的！换句话说，单个三次方程的求解就是无法改用任何有限次的各种各样二次方程求根和四则组合去替代之的。这种不可替代性强烈地显示了三次方程的根和二次方程的根肯定具有本质性的差别。唯有精确地认清两者之间的相异本质，才能严格论证这种不可替代性。

（二）在上面所讨论的代数问题中，所涉及的三次多项式的不可约性是至关重要的。而多项式的不可约性则是要在系数域明确界定之下才能决定者也。设 F 是一个给定的系数域，α 是一个 F 上不可约二次多项式的根，则有

$$F(\alpha) = \{c_0 + c_1\alpha\,;\, c_0, c_1 \in F\}$$

构成一个新的域，而且它也是 F 上的一个 2–维线性空间。

再者，设 V 是一个以 $F(\alpha)$ 为其系数域的 m 维线性空间。设 $\{\mathbf{b}_i, 1 \le i \le m\}$ 是 V 的一组基底，则 V 中任给元素 $\mathbf{x}$ 皆可唯一地表达为 $\{\mathbf{b}_i, 1 \le i \le m\}$ 的 $F(\alpha)$–线性组合，即

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \mathbf{b}_i, \quad \xi_i = a_i + b_i \cdot \alpha, \ a_i, b_i \in F$$

亦即

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^{m} b_i(\alpha \mathbf{b}_i)$$

所以，当我们把 V 想成是一个 F 上的线性空间时，则 V 中的任给元素皆可唯一地表达成 $\{\mathbf{b}_i, \alpha\mathbf{b}_i, 1 \le i \le m\}$ 的 F–线性组合。由此可见 V 是 F 上的 $2m$–维线性空间，亦即有

$$\dim_F V = 2 \cdot \dim_{F(\alpha)} V$$

（三）设 V 是由 F 起始，逐步添加二次方程的根扩张所得的域，即有

$$\begin{aligned} V &= F(\alpha_1)(\alpha_2)\dots(\alpha_k) \supsetneq F(\alpha_1)(\alpha_2)\dots(\alpha_{k-1}) \\ &\supsetneq \dots \supsetneq F(\alpha_1)(\alpha_2) \supsetneq F(\alpha_1) \supsetneq F \end{aligned}$$

其中 α_j 是一个以 $F(\alpha_1)\dots(\alpha_{j-1})$ 为系数域的二次不可约多项式的根。直接用上述维数公式逐步推进就有

$$\dim_F V = 2^k$$

（四）设 β 是一个以 F 为系数域的不可约三次多项式 $f(x)$ 的根。由上述所设可见 $\{1, \beta, \beta^2\}$ 线性无关，而 $\{1, \beta, \beta^2, \beta^3\}$ 则线性相关。再者，任何一个次数至多为 2 的多项式 $g(x)$ 当然是和 $f(x)$ 互素的，亦即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式等于 1。由辗转相除求最高公因式可得关系式

$$1 = A(x)f(x) + B(x)g(x)$$

将 β 代入上式即得

$$1 = A(\beta)f(\beta) + B(\beta)g(\beta) = B(\beta)g(\beta)$$

亦即 $g(\beta)$ 的倒数也可以表达为 $1, \beta, \beta^2$ 的线性组合。所以

$$F(\beta) = \{c_0 + c_1\beta + c_2\beta^2,\ c_0, c_1, c_2 \in F\}$$

业已构成一个域，它显然是 F 上的一个 3–维线性空间。

（五）最後我们要证明上述 β 不可能被包含在像前述 V 这种由 F 逐步添加有限个二次方程的根所扩张而得的域之中。假如不然，则 $V \supsetneq F(\beta)$。所以 V 也是 $F(\beta)$ 上的一个线性空间，设其维数为 n，$\{\mathbf{a}_i, 1 \le i \le n\}$ 是 V 的一组 $F(\beta)$–基底。则 $\{\mathbf{a}_i, \beta\mathbf{a}_i, \beta^2\mathbf{a}_i, 1 \le i \le n\}$ 就构成了 V 的一组 F–基底，亦即

$$2^k = \dim_F V = 3 \cdot \dim_{F(\beta)} V = 3 \cdot n$$

这显然是一个矛盾，因为 2^k 不可能被 3 整除！

当 $\beta = \sqrt[3]{2}$ 时，上述论证说明了[问题一]是无解的；而当 $\beta = \sin 10^\circ$ 时，上述论证说明了[问题二]在 $\theta = 30^\circ$ 时已经是无解的了。

0.2.5 研讨代数学的几个基本方法

基于代数问题的本质和代数学的基本思想，就自然产生了下列几种常用、有用的基本方法，它们乃是在代数学的研讨和各种各样代数问题的解法中贯穿全局，经常有用者。

1. 归纳发现、归纳论证与唯一性

几何学与代数学都是研究大自然的有力工具，但是两者的研讨方法却有著本质上的差异。在几何学的研讨中，我们有著相当可靠的几何直观 (geometric intuition) 的引导，往往在讨论初期便已得知结论的梗概，而且几何直观往往又能带领著我们逐步迈向所需的结论。相比之下，在代数学的研讨中，虽然我们具备各种各样有效能算的运算律，但是缺乏相应的「代数直观」的引导，我们所能「见」者并不甚远。这便是几何学和代数学两者在研讨方法上的一种重要差别。所以，在代数学的研讨中，寻找目标以作「有的放矢」乃是十分重要的一步，而这个「寻找『的』用以放矢」的工作，便是同学们曾接触过的归纳法，也是我们在第一节「数系运算律」的讨论中所用过的方法。

在中学的课程中，归纳法的应用往往是在于「归纳论证」的部分。其实由上面一小段的分析，大家可看到归纳法的要点其实在于「归纳发现」这一部分，而「归纳论证」只是用来确立「归纳发现」之所得者的理据。所以，在一个完整的归纳法中，理应可以分为下述三个部分：

一、 归纳地发现具有某种有用特性的事物 (inductive discovery)；

二、 归纳地定义该事物 (inductive definition)；

三、 归纳地证明上述归纳定义者的确具有所应有之特性 (inductive proof)。

所以若只著重「归纳证明」而忽略了「归纳发现」的讨论可以说是有点舍本逐末，断章取义的教学。在往後研讨线性方程的基础理论中，我们将以行列式的归纳发现、归纳定义和归纳论证为例来体现一个完整的归纳法的具体做法和用场。

在此，同学们可能会问：「如果采用另一种途径来归纳发现、定义上述行列式，会否得到另一种的『行列式』？」这个便是所谓的「唯一性」问题。在代数学的研讨中，我们会用五花八门的方法来寻找不同种类的公式，当然有可能会出现上述不同方法得出不同公式的情况。所以，在发现公式及论证其正确性之後，我们应当问一问这种「唯一性」的问题，亦即所求的公式是否业已由用来寻找它的特性所「唯一」地确定。大家要注意在这里的「唯一」并不只限于「一个」，而是包括「一类」、「一系列」等等较为广泛的意思，例如某组合所得者必为某类常数等等。我们将会证明行列式会由三个条件所唯一地确定，这个结果我们称之谓「行列式的界定定理」。行列式的界定定理的用途广泛多样，例如就可以用于证明有向面积或有向体积其实就是行列式这个结果。

其实，代数学中很多重要的公式和定理，都是由低次到高次、由少元到多元逐步归纳发现，然後再行归纳论证其普遍性，确立其唯一性。

2. 线性结构和线性化

韩信点兵法启示我们如何善用分解组合，把所待解的线性问题有系统地归于某一组易解的特殊解的线性组合而获得其通解。由此可见，

若能把多种多样的代数问题（或几何、分析问题）妥加组织，适当地把它们转化成线性问题，则韩信点兵法就可以大行其道了。在 §0.2.3 和 §0.2.4 中所讨论的乃是其中几个重要的实例。

3. 待定系数法

好些代数问题，可以适当地引进待定系数，把它归于解方程的理论来研讨之。这是代数学研讨中常用、好用的一种手法。下面所举者乃是一些简单的实例，暂且作为其初步简介之用。

在平面上，相异两点定一直线，不共线三点定一圆；这些都是很基本的几何事实。在坐标几何的讨论中，我们经常要找出这些线和圆的坐标方程，以便作後续的讨论和计算。但如果当中某些点含有未知的坐标时，求解上述的坐标方程便很麻烦了，例如要把某个系数是否为零的情况分开来讨论。但无论如何，直线方程必定是 $Ax+By+C=0$ 这种样子，圆的方程必定是 $A(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0$ 这种样子，是不？

待定系数法的精神就是假设所求的公式就是上述样子，然後用已给的资料列出相应的方程组，最後把原来问题转化成相应的方程组有否某种特定解而取代之。例如，设直线 $Ax+By+C=0$ 通过给定（相异）两点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，则有

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+C=0 \\ Ax_2+By_2+C=0 \end{cases}$$

若 (x,y) 是在线上的另给一点，则还有 $Ax+By+C=0$，即

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+C=0 \\ Ax_2+By_2+C=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$

由几何结论我们知道应可求出 A, B, C 的一个非平凡解，即 A, B, C 不全为 0 的一组解。所以，若把上述方程组想成以 A, B, C 为变元的线性方程组：

$$\begin{cases} x_1\cdot A+y_1\cdot B+1\cdot C=0 \\ x_2\cdot A+y_2\cdot B+1\cdot C=0 \\ x\cdot A+y\cdot B+1\cdot C=0 \end{cases}$$

则 A, B, C 不可能只有唯一解 $A=B=C=0$，亦即其系数的行列式必须为 0（详见第四章关于行列式的讨论），所以得出

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

这便是过 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 两点的直线方程。

同理，过不共线三点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 和 (x_3, y_3) 的圆方程 $A(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0$ 就是

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2+y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

总结本章对于代数学的绪论，可见代数问题的范畴其实是既广且深的。但是代数学的基本精神则是一贯的，亦即有系统、有效地运用运算律。当然，随著代数问题的深化和多样化，这种善用运算律的代数方法也就自然而然地深化和多样化。再者，为了把代数方法用来解决更多彩多姿的数学问题，也自然地产生了更多样、更精细的代数结构。其中最为简朴常用的就是线性结构，和它们的研讨所展现的线性代数学。这也是大学基础代数的一个中心课题。

0.3 例题、习题与思考题

0.3.1 数系运算律与数系扩张

(1) 自然数系运算律的归纳论证：加、乘、乘方的归纳定义乃是论证之所本，即

$$\begin{aligned} &a+(n+1)=(a+n)+1 \\ &(n+1)\cdot a=n\cdot a+a \\ &a^{(n+1)}=a^n\cdot a \end{aligned}$$

基于上述归纳定义式，即可逐步归纳证明自然数系的运算律，即加、乘的交换律与结合律，分配律与指数定则。在 §0.1 中业已列述了加法结合律，分配律和 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 的归纳证明。同学们应该以此为例进而逐步归纳论证其他各个运算律。请注意，这个奠基性的逐步论证运算律，在顺序上是很有考究的。

(2) 由自然数系到整数系的扩张及整数系运算律的验证：整数系比自然数系添加了 0 和负整数 $\{-n,\ n \in \mathbb{N}\}$，其特徵性质分别就是

$$a + 0 = a \quad \text{和} \quad (-n) + n = 0$$

试分析整数系的加、乘运算的定义及其运算律之普遍成立，并从而认清两者之间的密切相关。

(3) 由整数系到分数系的扩张及分数系运算律的验证：分数 $\frac{m}{n}$，其中 m, n 是整数而且 $n \neq 0$，它的特徵性质就是

$$n \cdot \frac{m}{n} = m, \quad \text{而且} \quad \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow m \cdot q = n \cdot p$$

试分析分数系的加、乘运算的定义及其运算律的普遍成立，并从而认清两者之间的密切相关。

0.3.2 辗转相除法与算术基本定理

(1) 带馀除法和辗转相除法：给定一个正整数 m，我们暂时还没有一个有效能算的方法来寻找其 1 和 m 以外的因数。因为这个分解过程没有有效计算方法，现今常用的密码就是用到这个计算上的盲点来编制的。但是若给定一对正整数 $n < m$，我们就有熟知的带馀除法，亦即存在（唯一的）整数 q_1 和 $0 \leq r_1 < n$，使得

$$m = q_1 \cdot n + r_1$$

若 $r_1 = 0$ 则 n 是 m 的一个因数，否则即不是。在此还可以看出一个好用的事实，即 (m, n) 的最大公因数等同于 (n, r_1) 的最大公因数！同学们可尝试验证之。

若 $r_1 > 0$，我们可以再用带馀除法于 (n, r_1)，则有

$$\begin{aligned} n &= q_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ r_{k-3} &= q_{k-1} \cdot r_{k-2} + r_{k-1} \\ r_{k-2} &= q_k \cdot r_{k-1} + r_k \\ r_{k-1} &= q_{k+1} \cdot r_k \end{aligned}$$

直至 $r_{k+1} = 0$ 为止。由此可见 (m, n) 的最大公因数就是 r_k！上述运算我们称之为「辗转相除法」，而在西方则称之为 "Euclidean Algorithm"，因为它写在 Euclid 的 "Elements" 中。

我们还可以运用上述各式把 r_k 重写成之前的 r_i 的倍数组合，即

$$\begin{aligned} r_k &= r_{k-2} - q_k r_{k-1} = r_{k-2} - q_k(r_{k-3} - q_{k-1} r_{k-2}) \\ &= -q_k r_{k-3} + (1 - q_k q_{k-1}) r_{k-2} \end{aligned}$$

如此逐步反代，最後就可以把 r_k 重写成 m 和 n 的倍数组合，即

$$r_k = A \cdot m + B \cdot n$$

其中 A, B 是适当的整数。由此可见 (m, n) 的最大公因数 r_k 其实可以写成 (m, n) 的倍数组合，易见它就是在其中的最小正整数（试证之）。

(2) 正整数的因数分解与算术基本定理：当我们从某些途径找到整数 n 的一个因数 $1 < k < n$ 时，我们当然可以把 n 分解成 $n = k \cdot \ell$。如此分解下去，我们最後就可以把 n 写成

$$n = k_1 \cdot k_2 \cdots k_m$$

其中每个 $k_i > 1$ 都只有 1 和 k_i 才是自己的因数。我们称这些 k_i 为 n 的质因数。一个自然的问题就是上述分解是否唯一呢（除了那些质因数的次序外）？稍加分析後，我们发现其证明的重点引理就是：

【引理】：若一个质数 p 可以整除整数乘积 ab，则它至少可以整除 a 或 b 其中之一。

同学们不妨验证由此即得上述唯一分解性的结论。但是如何证明这个引理呢？原来就是用到 (1) 的结论。如今反观，基本上别无他法。

引理证明：设 p 不能整除 a，则需要证明 p 必须整除 b。因为 (p,a) 的最大公因数为 1，由 (1) 的结论知道，存在整数 A, B 使得 $1 = Ap + Ba$。在等式两旁乘上 b，则有

$$b = Apb + Bab$$

因为上式右方可以被 p 所整除，所以 p 必须整除 b。 □

【算术基本定理】(Fundamental Theorem of Arithmetics)：给定一个整数 $n > 1$，存在有唯一的质数列 $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ 和指数列 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$，其中 $\alpha_i \geq 1, 1 \leq i \leq r$，使得

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

0.3.3 多项式基本公式举例

(1) $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$, $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$ 的推广：

(i) 试求 $q(x)$ 使得 $(x-1)q(x) = x^n - 1$.

(ii) 试求 $g(x)$ 使得 $(x-a)g(x) = x^n - a^n$.

(iii) 试证 $f(x) - f(a)$ 含有因式 $(x-a)$.

(iv) 若 $f(x)$ 在相异的三个数 a_1, a_2, a_3 的值为零，试证 $f(x)$ 含有因式 $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$.

(v) 上述事实是否可以推而广之？其叙述为何？

(vi) 试问一个 n 次多项式是否能够有多于 n 个相异的「根」（亦即使得 $f(x)$ 在其上取值为零者）？试证明你的论断。

(2) 二项展开公式的归纳构造

(i) 试运用分配律，把 $(x+y)^n$ 归纳地展开成单项式之和，其中 $n = 2, 3, 4, \ldots, 10$。

(ii) 把上题展开式所得的系数重新排列成如下的三角阵式：

$$\begin{array}{lc} n=0 & 1 \\ n=1 & 1 \quad 1 \\ n=2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\ n=3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ \vdots & \cdots \qquad \cdots \\ n=10 & 1 \quad 10 \quad \cdots \quad 10 \quad 1 \end{array}$$

试找出相邻两层系数之间的关系。

第一章

多项式的基础理论

在各种各样的代数问题中，我们总是运用各种代数运算（如加法、乘法等等）来分析量与量之间的代数关联。在运算过程中，运算律的普遍成立乃是常用好用的要点。这些运算律的普遍性让我们可以有系统、有效地分析所给代数问题中未知量和已知量之间的关联，从而「化未知为已知」。由于我们常用的数系运算律（如分配律、指数定则等等）对于所有数字皆普遍成立，所以其做法都可以广泛地应用到任何一个只需用到那些数系运算律的代数系统（即可以假设所处理的符号满足数系通性）。同学们在初中时所学习的多项式代数，就是上述做法的一个典型例子。

1.1 多项式运算

在这里我们首先列出一些关于多项式的基本事实，作为同学们对于多项式代数的简要复习。

1. 一个满足所有数系运算律的符号我们称之谓「不定元」(indeterminant)，通常以 x, y, z 等符号表示之（亦即 x, y, z 等符号的确实意义还有待确定；但无论如何，它们所代表的量必定会满足所有数系运算律的）。将有限个数字（称之谓「系数」(coefficients)）和不定元以加法和乘法结合起来的代数表达式，就是所谓的「多项式」(polynomial)。例如：

(i) 单项式 (monomial) 如 x^5, $\sqrt{2}x^3$, $-5x^2y^3$, $(\sqrt{2}+\sqrt{3})xyz^2$, $ax^\ell y^m z^n$ 等都是多项式的特例。

(ii) $(x-a)$, $x^3+ax^2+a^2x+a^3$, $(x-a)\cdot(x^3+ax^2+a^2x+a^3)$, $x+\sqrt{2}y-\sqrt{3}z$, $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, $x^3+y^3+z^3-3xyz$, $(x+y)^5$, $(x+y)^7$ 等等都是多项式。

(iii) 运用运算律（尤其是分配律），我们可以有系统地把任何多项式展开重组，把它重新表达成单项式之和。例如：

$$
\begin{aligned}
&(x-a)(x+a) = x^2 - a^2,\\
&(x-a)(x^2+ax+a^2) = x^3 - a^3,\\
&(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3) = x^4 - a^4,\\
&(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = x^3+y^3+z^3-3xyz,\\
&(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,\\
&(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 \ \ \text{等};\\
&(a_0+a_1x+a_2x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\\
&\qquad +(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x^3+a_2b_2x^4
\end{aligned}
$$

2. 在只有单个不定元的情况之下，任何多项式都能以该不定元的幂数 (powers 或 exponents) 由低幂至高幂，或由高幂至低幂顺序排列来表达之，即：

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \quad \text{或} \quad a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

前者称为升幂表达式 (ascending exponent normal form)，而後者则称为降幂表达式 (decending exponent normal form)。在上述两种表达式中，某些系数 a_i 可以是 0 的，而在习惯上我们总是会假设最高幂数的系数不等于 0（即上式中的 $a_n \neq 0$）。

3. 一个单项式的「次数」(degree) 定义为其（所有）不定元的指数之总和。例如：$\frac{1}{10}x^9$, $5^{10}x^2$, $-x^3y^2$ 和 $ax^\ell y^m z^n$ 的次数分别就是 9, 2, 5 和 $(\ell+m+n)$。而一个多项式 f 的次数则定义为实质出现在其表达式中的单项式之最高次数，记为 $\deg f$，如：

$$
\begin{aligned}
&f(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m,\ a_m \neq 0, && \deg f(x) = m;\\
&g(x) = b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n,\ b_n \neq 0, && \deg g(x) = n
\end{aligned}
$$

易见 $\deg(f(x)\cdot g(x)) = m+n$，因为 $f(x)\cdot g(x)$ 包含单项式 $(a_m\cdot b_n)x^{m+n}$，而这个单项式的次数显然是在 $f(x)\cdot g(x)$ 之中最高的。因此，下述公式是显而易见的：

$$\deg(f(x)\cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \tag{1.1}$$

[注意]：一个非零常数多项式的次数我们定义为 0，而「零多项式」的次数则定义为「$-\infty$」。采用这个定义，则 (1.1)–式在下述特殊情况下亦可言之成理，即

$$\deg(0) = \deg(0\cdot g(x)) = \deg(0) + \deg g(x) \tag{1.2}$$

仍然成立，因为在一般的理解之下「$-\infty = -\infty +$ 任何有限整数」。

然而对于多项式的加法，我们并没有特定的公式从 $\deg f(x)$ 和 $\deg g(x)$ 来计算 $\deg(f(x)+g(x))$。在一般的情形我们至多只可以说

$$\deg(f(x)+g(x)) \le \max\{\deg f(x), \deg g(x)\} \tag{1.3}$$

而且等式在 $\deg f(x) \neq \deg g(x)$ 时总是成立。

[注]：当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 两者的最高次数的单项式互相抵消时，不等式 "$<$" 就会成立。

4. 令

$$\begin{aligned} f(x) &= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0 \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 \end{aligned}$$

并假设 $\deg f(x) = m > n = \deg g(x)$，则易见

$$\deg\left((f(x) - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}\cdot g(x))\right) < m = \deg f(x) \tag{1.4}$$

因为 $f(x)$ 与 $\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}g(x)$ 两者的最高次数单项式刚好互相抵消。其实上述运算就是我们惯用常做的多项式长除法的步骤！只需重复地做上述运算，我们最终就可得出一个（唯一的）$g(x)$ 的多项式倍式，且以 $q(x)\cdot g(x)$ 记之，使得

$$\deg(f(x) - q(x)\cdot g(x)) < \deg g(x), \quad \text{或}$$

$$f(x) = q(x)\cdot g(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg g(x) \tag{1.5}$$

我们通常把 (1.5)–式称之谓「多项式的带馀除法」(division algorithm for polynomials)。

[注意]：上述带馀除法只适用于单元多项式的范畴！多元多项式是没有这种带馀除法的！

1.2 多项式函数

在一个系统中，当一个量的值唯一地确定另一个量的值时，我们称後者（因变量，dependent variable）为前者（自变量，independent variable）的「函数」(function)。例如，圆盘面积和球体体积都是其半径的函数，而在各自的公式中，即：

$$A = \pi r^2 \quad \text{或} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{1.6}$$

它们之间的函数关联是可以由一些明确的运算来确定。一般地说，若 y 的值是由 $x_1, \ldots, x_n$ 这 n 个量之值所唯一确定，则称 y 为 $x_1, \ldots, x_n$ 的函数。例如：一个三角形的面积是其三边边长的函数，而一个矩形的面积则是其长和宽的函数。它们的明确关系式则分别是：

$$\begin{aligned} A(\triangle) &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}, \\ A(\square) &= \ell \cdot w \end{aligned}$$

在往後的讨论中我们将会集中讨论一系列比较特殊的函数，其中每一个函数的明确表达式是可以用某一个特定的多项式来表达者，即：

$$y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \tag{1.7}$$

这类函数我们称之谓「多项式函数」(polynomial function)，往後我们将以 $y = f(x)$ 来表达由多项式 $f(x)$ 所决定的多项式函数 y，并以 $f(a)$ 代表当 $x = a$ 时 y 所对应的值，一般称作「y（或 $f(x)$）在（位置）$x = a$ 的值」。

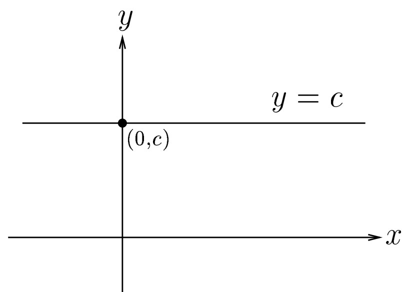
若我们让 x 在实数线上随意变动，则在坐标平面上所有以 $(x, f(x))$ 为坐标的点就组成一条曲线。这条曲线就是以几何方式来表达函数 $y = f(x)$，我们称之谓 $y = f(x)$ 的「图象」，即：

$$f(x) \text{ 的图象} = \{(x, f(x));\ x \in \mathbb{R}\} \tag{1.8}$$

下面是一些基本的多项式函数的图象的例子。

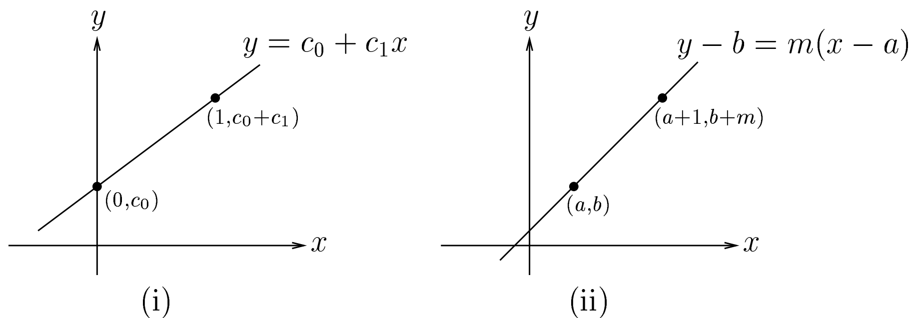
【例子】：

(i) $\underline{\deg f(x) = 0}$：$y = c$（$c$ 为常数）



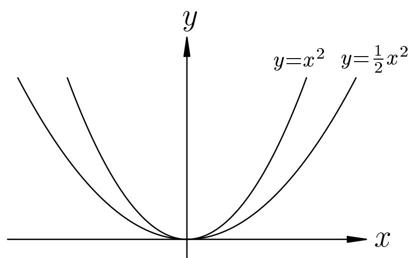
[图 1–1]

(ii) $\underline{\deg f(x) = 1}$：$y = c_0 + c_1 x$ 或 $y - b = m(x - a)$



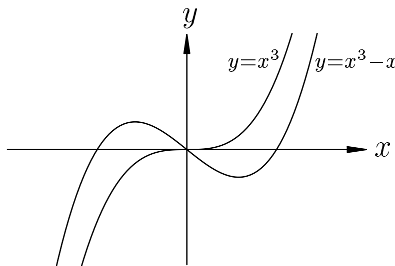
[图 1–2]

(iii) $\underline{\deg f(x) = 2}$：$y = kx^2$, $k = 1, \frac{1}{2}$



[图 1–3]

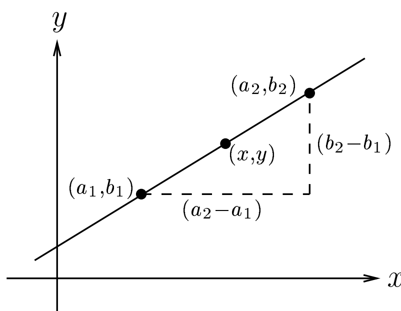
(iv) <u>$\deg f(x) = 3$</u>：$y = x^3$, $y = x^3 - x$



[图 1–4]

<u>根、值和插值问题</u>：

显然一个 1 次（或 0 次）的多项式函数是可被其在两个（或一个）位置的值所唯一地确定。因为 1 次多项式函数的图象是一条直线，所以上述现象就是对应于「相异两点定一直线」这个众所周知的几何事实。



[图 1–5]

例如，若 1 次多项式函数 $y = f(x)$ 满足 $b_1 = f(a_1)$ 和 $b_2 = f(a_2)$，则其表达式为：

$$(y - b_1) = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(x - a_1) \tag{1.9}$$

上述简单事实可以自然而然地推广为下述唯一性问题，即：

【问题一】：一个 n 次多项式函数是否由其在 $(n+1)$ 个相异位置的值所唯一决定？换句话说，若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为两个次数至多为 n 的多项式，它们在 $(n+1)$ 个相异位置 $\{a_i; 0 \leq i \leq n\}$ 的值相同，即 $f(a_i) = g(a_i)$, $0 \leq i \leq n$，问 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否必然相等？

令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则易见 $h(x)$ 的次数不高于 n，而且 $h(a_i)=f(a_i)-g(a_i)=0,\ 0\le i\le n$。所以，若我们可以证明任何一个次数不高于 n 的非零多项式最多只能有 n 个根（roots，即 h 取 0 为值的位置），则由此可见 $h(x)$ 必为零多项式，并给出了上述[问题一]的一个正面的解答。

【定理 1.1】：一个 n 次非零多项式最多只有 n 个根。再者，一个次数不高于 n 的多项式函数是可以由其在 $(n+1)$ 个相异位置的值所唯一确定。

证明：容易验证 $c_k(x^k-a^k)=(x-a)\cdot c_k(x^{k-1}+ax^{k-2}+\ldots+a^{k-1})$，所以

$$\begin{aligned}f(x)-f(a)&=[c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots+c_nx^n]\\&\qquad-[c_0+c_1a+\ldots+c_ka^k+\ldots+c_na^n]\\&=c_1(x-a)+c_2(x^2-a^2)+\ldots+c_k(x^k-a^k)+\ldots+c_n(x^n-a^n)\\&=(x-a)\cdot q(x)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}q(x)=c_1+c_2(x+a)+\ldots+c_k(x^{k-1}+ax^{k-2}+\ldots+a^{k-1})\\+\ldots+c_n(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-1})\end{aligned}$$

所以，a 是 $f(x)$ 的一个根的充要条件为 $f(x)=(x-a)\cdot q(x)$，亦即 $(x-a)$ 是 $f(x)$ 的一个因式。如此逐步地做下去，即得当 $\{a_1,\ldots,a_k\}$ 是 $f(x)$ 的 k 个相异根时，则 $(x-a_1)\ldots(x-a_k)$ 乃是 $f(x)$ 的一个因式，亦即

$$f(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_k)\cdot g(x) \tag{1.10}$$

因此，若一个 n 次多项式 $f(x)$ 已具有 n 个相异根 $\{a_i,1\le i\le n\}$，则可将 $f(x)$ 写成

$$f(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)\cdot g_n(x) \tag{1.11}$$

其中 $\deg g_n(x)=0$，亦即 $g_n(x)$ 其实是一个非零常数（即 $g_n(x)=c_n$）。所以，若 a 为 $\{a_i,1\le i\le n\}$ 之外的任何一点，则有

$$f(a)=(a-a_1)\cdot(a-a_2)\ldots(a-a_n)\cdot c_n,\quad (a-a_i)\neq 0,\ 1\le i\le n \tag{1.12}$$

亦即 $f(a)$ 等于 $(n+1)$ 个非零数值之乘积，当然不会是零；所以一个 n 次非零多项式最多只有 n 个根。由此亦可推得一个次数不高于 n 的多项式函数是可以由其在 $(n+1)$ 个相异位置的值所唯一确定。 □

上述「唯一性」定理很自然地带出下述「存在性」问题，即：

【问题二】：设 $\{a_i; 0 \le i \le n\}$ 为任意给定的 $(n+1)$ 个相异位置。令 $\{b_i; 0 \le i \le n\}$ 为任意给定的 $(n+1)$ 个值（不必相异）。问是否存在一个次数不高于 n 的多项式函数 $y = f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i,\ 0 \le i \le n$？再者，若这个多项式函数是存在的（由[定理 1.1]知道此函数必定是唯一的），如何去求得这个函数呢？

（上述乃是一个非常重要的插值问题，而其完满解答则是韩信点兵法的直接推广，详见下一节的讨论。）

【习题】：

(1) 对于下列每一对的 $\{f(x), g(x)\}$，运用除法算式找出相应的 $q(x)$ 和 $r(x)$ 使得：

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg g(x)$$

(i) $f(x) = 5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1,\ g(x) = x - 1$

(ii) $f(x)$ 同上，$g(x) = x^2 - x + 1$

(iii) $f(x) = x^7 + x^4 - 10x^2 - 1,\ g(x) = x^2 + x + 1$

(iv) $f(x) = x^6 - 2x^4 + x^2 - 1,\ g(x) = x^2 + 1$

(2) 把下列的 2 次多项式函数重写成 $(y - b) = k(x - a)^2$ 的模样，并描绘出它们的图象：

(i) $y = 3x^2 - 6x + 8$

(ii) $y = -x^2 + \sqrt{7}x - 13$

(iii) $y = \sqrt{7}x^2 - \sqrt{21}x + 10$

(3) 在上题中所列出的三个 2 次多项式函数的极大值（或极小值）分别是多少？分别在那里出现？

(4) 把下列的 3 次多项式函数重写成 $(y-b)=k(x-a)^3+m(x-a)$ 的模样：

  (i) $y=x^3-6x^2+x-7$
  (ii) $y=x^3+6x^2-10x+1$
  (iii) $y=5x^3-15x^2+10x+7$

(5) 试求公式计算下述等差级数之总和，即：

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+(n-1)d)=?$$

(6) 试求公式计算下述等比级数之总和，即：

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=?$$

1.3 韩信点兵法和插值公式

在绪论中所提到的「韩信点兵法」，乃是有系统地把馀数问题归结到一组简朴的特殊解而加以组合之，是一种善用分配律的解题方法。现在让我们先重温一下「韩信点兵法」的基本想法：

在求解剩馀问题时，当馀数之中只有一个是 1，其他皆为 0 的特殊情形，不但容易解答，而且可以用这一系列特殊解，把一般情形的解答简洁地用下述公式表达之。设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是对于给定一组公因数为 1（亦即互质）的除数 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，其馀数组分别是 $(1,0,\cdots,0)$, $(0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $(0,\cdots,0,1)$ 的特殊解，则

$$x=r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_kx_k \tag{1.13}$$

乃是一个馀数组是 $(r_1,r_2,\cdots,r_k)$ 的解。而且任何以 $(r_1,r_2,\cdots,r_k)$ 为馀数组的解和上述 x 相差一个 $a_1a_2\cdots a_k$ 的整数倍。上述公式 (1.13) 之所以普遍成立的理由就是分配律。由分配律可见 r_ix_i 被 a_i 除的馀数是 r_i 而且 $x-r_ix_i=\sum_{j\neq i}r_jx_j$ 被 a_i 除的馀数是 0（因为每一个 r_jx_j, $j\neq i$, 都含有因子 a_i）。由此可见，上述算法的基本思想就是善用分配律，把剩馀问题的一般情形，直截了当地归于易解好算的特殊情形来系统解答之。

在数论里，这是一个很重要的基本定理，称作「中国剩馀定理」。现在让我们再次运用这种大巧若拙的算法用来研究多项式函数的插值问题。

插值公式 (interpolation formula)：

为简化讨论起见，我们考虑 $n = 3$ 作为典型情况讨论之；由于解法是可以作明显的推广（就像馀数问题一样），我们可以沿用同样方法求得在一般情况下的结果。

设 $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ 为四个相异位置，$\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ 为四个任意给定数值。则在上一节所提出的[问题二]即为：是否存在一个次数不高于 3 的多项式函数 $y = f(x)$，它在 $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ 上的值恰好就是 $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$？现在我们就用「韩信点兵法」的想法来写下上述所求的多项式 $f(x)$，直截了当地说明其存在性。

注意当 $f(x)$ 被除以 $(x - a_i)$ 时，其馀数就是 $f(a_i) = b_i,\ 0 \le i \le 3$（详见[定理 1.1]的证明）。因此上述插值问题只是「馀数问题」的直接推广，即由整数除法推广至多项式除法，而现在的除式就是 $\{(x - a_i); 0 \le i \le 3\}$。所以，我们的祖先业已教导我们应先讨论一些特殊的情况，即 $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ 分别为 $(1, 0, 0, 0)$、$(0, 1, 0, 0)$、$(0, 0, 1, 0)$、$(0, 0, 0, 1)$ 这四种情况。令 $f_i(x),\ 0 \le i \le 3$ 分别为具有上述馀数集的 3 次多项式。这样，$f_0(x)$ 乃是 $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ 的倍式，亦即：

$$f_0(x) = c(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \tag{1.14}$$

由假设 $f_0(a_0) = 1$ 得：

$$1 = f_0(a_0) = c(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3) \tag{1.15}$$

因此 $c = [(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)]^{-1}$，亦即：

$$f_0(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)} \tag{1.16}$$

同理可得：

$$f_1(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)};$$
$$f_2(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)};$$
$$f_3(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

到此阶段，前述的插值问题的解答已是「呼之欲出」，即：

$$f(x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + b_3 f_3(x) \tag{1.17}$$

就是我们所要的多项式。上述想法显然是可以推广至任意 $(n+1)$ 个相异位置 $\{a_i, 0 \le i \le n\}$ 的情况，且让我们将其结论写成下述定理：

【定理 1.2】（拉格朗日插值公式，Lagrange interpolation formula）：设 $\{a_i; 0 \le i \le n\}$ 为任意给定的相异位置，$\{b_i; 0 \le i \le n\}$ 为任意给定的数值（不必相异），则存在唯一的多项式 $f(x)$，其次数不高于 n，使得 $f(a_i) = b_i,\ 0 \le i \le n$。再者，$f(x)$ 的明确表达式就是：

$$f(x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + \ldots + b_n f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i(x) \tag{1.18}$$

其中

$$f_0(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_n)} = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)\Big/\prod_{i=1}^{n}(a_0-a_i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_j(x) = \prod_{i \ne j}(x-a_i)\Big/\prod_{i \ne j}(a_j-a_i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-a_i)\Big/\prod_{i=0}^{n-1}(a_n-a_i)$$

[注]：

(i) 推导上述公式的方法和我们原先在讨论 $n=3$ 时的方法其实是完全一样的；而唯一有别的地方就是要改用和、积记号如 $\sum_{i=0}^{n}$、$\prod_{i\neq j}$。

(ii) $\{a_i; 0\leq i\leq n\}$ 为相异的条件保证了每个出现在公式分母中的乘积 $\prod_{i\neq j}(a_j-a_i)$ 皆不为 0。

(iii) $\{a_i\}, \{b_i\}, \{f_i(x)\}$ 和 $f(x)$ 之间的关系可以简洁地用下表表示之：

x	a_0	a_1	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_n
$f_0(x)$	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$f_1(x)$	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$f_i(x)$	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$f_n(x)$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f(x)$	b_0	b_1	$\cdots$	b_i	$\cdots$	b_n

而结论 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i f_i(x)$ 则可以由下述公式

$$f(a_j)=\sum_{i=0}^{n} b_i f_i(a_j)=b_i$$

所得出，因为$f_j(a_j)=1$，而对于其他所有 $i\neq j$ 而言，$f_i(a_j)=0$。

(iv) 上述的插值公式让我们可以把一个「尚待确定」的多项式的样子，用它在不同地方的值直截了当地写下来。这个尚待确定的多项式往往就是一些未知的理论公式或实验公式，所以插值公式不管在理论上或实际应用上都是很重要的。在下一节的讨论中，我们将会应用插值法来研究「求和公式」的性质和其明确表达式。

【习题】：

(1) 令 $g_k(x)$ 为那个唯一确定的 k 次多项式使得 $g_k(i)=0,\ 0\le i\le k-1$ 和 $g_k(k)=1$。试找出这系列的多项式 $\{g_k(x),\ k=1,2,3,4,\ldots\}$。

(2) 设除数为 $\{7,11,13\}$。试找出小于 1001 的正整数使得其馀数集分别为 (i) $(0,3,7)$ (ii) $(4,2,2)$ (iii) $(4,5,9)$

(3) 试求公式来计算下述的总和

$$0^2+1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=f(n)$$

亦即上述定义的 $f(n)$ 应该是什麽？

[提示：先假设所求的 $f(n)$ 是一个 n 的 3 次多项式。]

(4) 试求公式来计算下述的总和

$$\frac{1}{2}\cdot 0(0-1)+\frac{1}{2}\cdot 1(1-1)+\ldots+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=F(n)$$

亦即上述定义的 $F(n)$ 应该是什麽？

(5) 试求公式来计算下述的总和

$$0^3+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3=g(n)$$

亦即上述定义的 $g(n)$ 应该是什麽？

[提示：先假设所求的 $g(n)$ 是一个 n 的 4 次多项式。]

(6) 试求公式来计算下述的总和

$$\frac{1}{6}\cdot 0(0-1)(0-2)+\frac{1}{6}\cdot 1(1-1)(1-2)+\ldots+\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)=G(n)$$

亦即上述定义的 $G(n)$ 应该是什麽？

1.4 求和公式 (Summation Formula)

现在让我们先看一看几个简单的求和公式的例子：

(i) $S_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$

在历史上来说，上述级数的求和公式可以用下述巧妙的方法来发现，即

$$\begin{array}{rrcccccccc} & S_n = & 0 & + & 1 & + & 2 & + \ldots + & (n-1) \\ +) & S_n = & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + \ldots + & 0 \\ \hline & 2S_n = & (n-1) & + & (n-1) & + & (n-1) & + \ldots & + (n-1) = n \cdot (n-1) \end{array}$$

因此

$$S_n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

(ii) 运用同样方法也可以找出下述等差级数的求和公式：

$$\widetilde{S}_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + \big[a + (n-1)d\big] = \frac{1}{2}n\big[2a + (n-1)d\big]$$

即以互逆方向相加 $\widetilde{S}_n + \widetilde{S}_n$，得出

$$\begin{aligned} 2\widetilde{S}_n &= \big[2a + (n-1)d\big] + \big[2a + (n-1)d\big] + \ldots + \big[2a + (n-1)d\big] \\ &= n \cdot \big[2a + (n-1)d\big] \end{aligned}$$

其实，我们还可以应用已知 S_n 的公式来间接地求得上述公式：

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{(n-1)} (a + id) &\overset{(\text{分配律})}{=} n \cdot a + d \cdot \sum_{i=0}^{(n-1)} i = n \cdot a + d \cdot \frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{1}{2}n\big[2a + (n-1)d\big] \end{aligned}$$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{(n-1)} i^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

据历史记载，古代中国和古希腊的数学家都知道上述级数的求和公式，但是他们究竟是如何求得此公式，现已无法考证了。不过

，只要他们能够从某些途径或想法得出一个正确的「猜想公式」，再去验证这个猜想公式的真确性其实并不是一件很困难的事情。以现今的说法，验证工作只需要证明下述恒等式：

$$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+n^2 \overset{?}{\equiv} \frac{1}{6}(n+1)\cdot n\cdot(2n+1)$$

用上述恒等式所提供者作为「归纳步骤」，就可以用数学归纳法来证明上述求和公式的真确性。

(iv) 其实古代中国和古希腊的数学家亦知道另一个类似的求和公式：

$$\sum_{i=0}^{(n-1)}\frac{1}{2}i(i-1)=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

同理，以现今的方法我们只需验证：

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)+\frac{1}{2}n(n-1) &= \frac{1}{6}n(n-1)\big[n-2+3\big]\\ &= \frac{1}{6}(n+1)n(n-1)\end{aligned}$$

即可用归纳法证得上述求和公式的真确性。

由此可见，假若我们能够从某些途径找出一个正确的猜想公式，则馀下所需的验证工作其实是相当简单的「归纳证明」。因此，问题的要点在于怎样去发现和写出这个「尚待确定」的求和公式。现在，让我们应用插值法来找出一个「有系统的」求和公式探讨，作为插值法应用的一个好例子。

首先，如「韩信点兵法」所示，我们不妨先把问题放在一个适当广度的范畴来讨论：

【问题三】：给定任意的多项式 $f(x)$，如 $1, x, x^2, x^3$，或 $\frac{1}{2}x(x-1)$, $\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$ 等等，怎样找出求和公式 $S_f(n)$ 来计算下述级数之总和

$$\sum_{i=0}^{(n-1)} f(i)=f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)=? \tag{1.19}$$

亦即要找出适当公式 $S_f(n)$ 使得

$$\sum_{i=0}^{(n-1)} f(i) = S_f(n) \tag{1.20}$$

对于所有 $n = 1, 2, 3, \ldots$ 皆成立。

<u>分析</u>：

(i) 不妨先假设上述求和公式 $S_f(n)$ 是 n 的多项式。则 $S_f(n)$ 满足下述的特徵性质：

$$\begin{aligned} &S_f(n+1) - S_f(n) = f(n), \\ &S_f(0) = 0 \quad [\text{零项的总和当然应该是 } 0] \end{aligned}$$

(ii) 反之，假若有一个多项式 $S_f(x)$ 满足条件 $S_f(0) = 0$ 和

$$S_f(x+1) - S_f(x) = f(x)$$

其中的 $S_f(x+1)$ 表示把 $S_f(x)$ 内所有的 x 都换成 $x+1$ 者，则

$$\begin{aligned} S_f(i+1) - S_f(i) &= f(i), \quad i \geq 0 \\ \sum_{i=0}^{(n-1)} f(i) &= \sum_{i=0}^{(n-1)} \big(S_f(i+1) - S_f(i)\big) \\ &= S_f(n) - S_f(0) = S_f(n) \end{aligned}$$

【定理 1.3】：给出任何一个 k 次多项式 $f(x)$，存在一个唯一的 $k+1$ 次多项式 $S_f(x)$，它满足条件 $S_f(0) = 0$ 和

$$S_f(x+1) - S_f(x) = f(x) \tag{1.21}$$

亦即

$$\sum_{i=0}^{(n-1)} f(i) = S_f(n) \tag{1.22}$$

对于所有 $n = 1, 2, 3, \ldots$ 皆成立。

证明：让我们先对 k 用归纳法来证明 $S_f(x)$ 的存在性。当 $k = 0$ 时，$f(x)$ 实质上是一个常数，即 $f(x) \equiv c$。易知这时 $S_f(x) = cx$，亦即

$$S_f(x+1) - S_f(x) = c(x+1) - cx = c = f(x) \tag{1.23}$$

归纳假设对所有次数不高于 k 的多项式 $f(x)$，求和公式 $S_f(x)$ 皆存在，而且其次数不高于 $k+1$；现在进而证明对任意给出的 $(k+1)$ 次多项式 $f(x)$，其所相应的 $S_f(x)$ 的存在性如下。令

$$\begin{aligned} &f(x) = cx^{k+1} + g(x), \quad \deg g(x) \le k \\ &\frac{c}{k+2}\big[(x+1)^{k+2} - x^{k+2}\big] = cx^{k+1} + h(x) \end{aligned} \tag{1.24}$$

易见

$$(x+1)^{k+2} = x^{k+2} + (k+2)x^{k+1} + \text{不高于 } k \text{ 次的多项式} \tag{1.25}$$

所以有 $\deg h(x) \le k$ 和 $\deg(g(x) - h(x)) \le k$。由归纳假设得知存在一个次数不高于 $(k+1)$ 的多项式 $G(x)$ 使得：

$$G(0) = 0 \quad \text{和} \quad G(x+1) - G(x) = g(x) - h(x) \tag{1.26}$$

令

$$S_f(x) = \frac{c}{k+2}x^{k+2} + G(x) \tag{1.27}$$

则 $S_f(0) = 0$ 和

$$\begin{aligned} S_f(x+1) - S_f(x) &= \frac{c}{k+2}\big[(x+1)^{k+2} - x^{k+2}\big] + \big[G(x+1) - G(x)\big] \\ &= cx^{k+1} + h(x) + \big[g(x) - h(x)\big] \\ &= cx^{k+1} + g(x) = f(x) \end{aligned} \tag{1.28}$$

这样便归纳地证明了 $S_f(x)$ 的存在性。

至于 $S_f(x)$ 的唯一性则可以由[定理 1.1]的结论和 $S_f(x)$ 的特徵性质：

$$\sum_{i=0}^{(n-1)} f(i) = S_f(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.29}$$

直接推论而得。 □

[注]：当求和公式的存在性和唯一性业已验证妥当後，插值法便提供了一种非常有效的方法来求出 $S_f(x)$ 的明确公式。

一个 k 次多项式 $f(x)$ 是可以由其 $(k+1)$ 个值 $\{f(i); 0 \le i \le k\}$ 所唯一确定。而相应的求和公式 $S_f(x)$，由于它是 $(k+1)$ 次多项式，则需要由其 $(k+2)$ 个值所决定，即

$$
\begin{aligned}
&S_f(0) = 0,\ S_f(1) = f(0),\ S_f(2) = f(0) + f(1), \ldots \\
&S_f(k+1) = f(0) + f(1) + \ldots + f(k)
\end{aligned}
$$

因此，我们很自然地便想到可以用插值法来从上述 $(k+2)$ 个接连的和值来求出 $S_f(x)$ 的明确公式。

<u>一系列特殊的多项式</u>：令

$$
\begin{aligned}
&g_0(x) = 1,\ g_1(x) = x,\ g_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1), \ldots, \\
&g_k(x) = \frac{1}{k!}x(x-1)\ldots(x-k+1), \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

上述 $g_k(x)$ 的选取是使得 $g_k(i) = 0, 0 \le i \le (k-1)$ 和 $g_k(k) = 1$，所以 $g_k(n)$ 的首 k 个总和皆为 0（即 $S_{g_k}(i) = 0, 1 \le i \le k$），而第 $(k+1)$ 个总和是 1（即 $S_{g_k}(k+1) = 1$）。这刚好表示 $g_k(x)$ 的求和公式其实就是此系列多项式的下一位成员，即

$$
S_{g_k}(x) = g_{k+1}(x)
$$

上述极为简洁的关系式自然而然地成为我们用来寻找求和公式的有效工具（就像在馀数问题中的 $x_1, \ldots, x_k$ 一样）。给定任意一个 ℓ 次的多项式 $f(x)$，其求和公式 $S_f(x)$ 可以用下述方法来有系统地确定之：

(i) 首先要注意 $f(x)$ 是可以唯一地写成 $\{g_k(x); 0 \le k \le \ell\}$ 的常数倍之组合，亦即存在系数集 $\{c_k; 0 \le k \le \ell\}$ 使得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \ldots + c_k g_k(x) + \ldots + c_\ell g_\ell(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} c_k g_k(x)
\end{aligned}
$$

上述组合一般称之为 $\{g_k(x), 0 \le k \le \ell\}$ 的「线性组合」(linear combination)。

(ii) 然後，由分配律可得：

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{(n-1)} f(i) &= \sum_{i=0}^{(n-1)} \big(c_0 g_0(i) + c_1 g_1(i) + \ldots + c_k g_k(i) + \ldots + c_\ell g_\ell(i)\big) \\ &= c_0 \sum_{i=0}^{(n-1)} g_0(i) + \ldots + c_k \sum_{i=0}^{(n-1)} g_k(i) + \ldots + c_\ell \sum_{i=0}^{(n-1)} g_\ell(i) \\ &= c_0 g_1(n) + c_1 g_2(n) + \ldots + c_k g_{k+1}(n) + \ldots + c_\ell g_{\ell+1}(n)\end{aligned}$$

即

$$S_f(x) = \sum_{k=0}^{\ell} c_k g_{k+1}(x)$$

由此可见若要写下这个待定的 $S_f(x)$ 的明确表达式，就只需去求得系数集 $\{c_k; 0 \le k \le \ell\}$。所以接著的工作就是如何有效地从 $\{f(i); 0 \le i \le \ell\}$ 这 $(\ell+1)$ 个值来确定系数集 $\{c_k; 0 \le k \le \ell\}$。

(iii) 首个系数 c_0 显然等于 $f(0)$，因为 $g_k(0) = 0, k > 0$。为了方便描述下面一套有系统的方法来从 $\{f(i); 0 \le i \le \ell\}$ 这 $(\ell+1)$ 值求得对应系数集 $\{c_k; 0 \le k \le \ell\}$，我们引进下述运算符号（称之为差分算子，difference operator）：

$$\triangle f(x) = f(x+1) - f(x)$$

不难直接验证 $\triangle$ 算子具有下述易算好用的性质：

$$\triangle(f(x) + h(x)) = \triangle f(x) + \triangle h(x), \quad \triangle(cf(x)) = c\,\triangle(f(x))$$

另一方面，因为 $g_k(x)$ 是 $g_{k-1}(x)$ 的求和公式，易见

$$\triangle g_k(x) = g_{k-1}(x)$$

由此可得

$$\begin{aligned}\triangle f(x) &= \triangle\big(c_0 + c_1 g_1(x) + \ldots c_\ell g_\ell(x)\big) \\ &= 0 + c_1 g_0(x) + c_2 g_1(x) + \ldots + c_\ell g_{\ell-1}(x)\end{aligned}$$

即

$$c_1 = \triangle f(0) = f(1) - f(0)$$

再次应用 $\triangle$ 算子，我们便可以如下算出下一个系数 c_2：

$$\triangle^2 f(x) = c_2 g_0(x) + c_3 g_1(x) + \ldots + c_\ell g_{\ell-2}(x)$$

$$\begin{aligned} c_2 = \triangle^2 f(0) &= \triangle f(1) - \triangle f(0) \\ &= \big(f(2) - f(1)\big) - \big(f(1) - f(0)\big) \\ &= f(2) - 2f(1) + f(0) \end{aligned}$$

如此类推，我们不断重复应用 $\triangle$ 算子，然後再代入 $x = 0$，便可逐步从 $\{f(i); 0 \le i \le \ell\}$ 求得 $\{c_k; 0 \le k \le \ell\}$：

$$\begin{array}{c} (c_0 =)\ f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3), \ldots\ldots, f(\ell-1), f(\ell) \\ (c_1 =) \triangle f(0), \triangle f(1), \triangle f(2), \ldots\ldots, \triangle f(\ell-1) \\ (c_2 =) \triangle^2 f(0), \triangle^2 f(1), \ldots\ldots, \triangle^2 f(\ell-2) \\ (c_3 =) \triangle^3 f(0), \ldots\ldots, \triangle^3 f(\ell-3) \\ \vdots \qquad \vdots \\ (c_\ell =) \triangle^\ell f(0) \end{array}$$

[下一层的数值是由上一层相邻的两个数值之差所得出的。]

【例子】：

(i) $\underline{f(x) = x^2}$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 1 & & 4 \\ & 1 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

$f(x) = g_1(x) + 2g_2(x)$

$S_f(x) = g_2(x) + 2g_3(x) = \dfrac{1}{6}x(x-1)(2x-1)$

(ii) $\underline{f(x) = x^3}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 8 & & 27 \\ & 1 & & 7 & & 19 & \\ & & 6 & & 12 & & \\ & & & 6 & & & \end{array}$$

$$f(x) = g_1(x) + 6g_2(x) + 6g_3(x)$$

$$S_f(x) = g_2(x) + 6g_3(x) + 6g_4(x) = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2$$

(iii) $\underline{f(x) = x^4}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 1^4 & & 2^4 & & 3^4 & & 4^4 \\ & 1 & & 15 & & 65 & & 175 & \\ & & 14 & & 50 & & 110 & & \\ & & & 36 & & 60 & & & \\ & & & & 24 & & & & \end{array}$$

$$f(x) = g_1(x) + 14g_2(x) + 36g_3(x) + 24g_4(x)$$

$$S_f(x) = g_2(x) + 14g_3(x) + 36g_4(x) + 24g_5(x)$$

【习题】：

(1) 试找出下列 $f(x)$ 的求和公式 $S_f(x)$：

(i) $f(x) = x^2(x-1)$

(ii) $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$

(iii) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2$

(iv) $f(x) = x^3(x-1)(x-2)$

(v) $f(x) = x^2(x+1)(x-1)(x-2)$

(vi) $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(2) 试证明 $\{g_k(x), k = 0, 1, 2, \ldots\}$ 在所有整数点（即包括正、负和零）上恒取整数值。

(3) 若一个多项式 $f(x)$ 在所有的整数点上取整数值，问 $f(x)$ 与 $\{g_k(x), k=0,1,2,\ldots\}$ 的关系是什麽？

(4) 设 $f(x)$ 为一个 n 次多项式，它在 $0,1,2,\ldots,n$ 这 $(n+1)$ 点上皆取整数值。问 $f(x)$ 在其他的整数点上是否也取整数值？

(5) 试求一个 4 次多项式 $f(x)$ 在 (i) 0, 1, 2, 3, 5; (ii) 0, 1, 2, 3, 6 皆取整数值的充要条件。

(6) 若一个 k 次多项式 $f(x)$ 在 $0,2,4,\ldots,2k$ 上皆取整数值，问 $f(x)$ 在其他的偶数点上是否也取整数值？

(7) 设一个 k 次多项式在 $(k+1)$ 个连接的整数点上皆取偶数值（或奇数值），试问它是否在所有整数点上皆取偶数值（或奇数值）？试证明你的论断。

1.5 插值法与因式分解

因式分解在初中的代数课程里是常常遇到的题目。同学们试回想一下当时究竟是用那一种方法来找一个给定多项式的因式分解？相信大多数是采用「盲目撞试」的方法。及至引进了馀式定理後，才有一个比较有系统的方法来撞试其一次因式的可能性。但假若给定的多项式并没有整数系数的一次因式，例如

$$2x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x + 3$$

相信大家对于寻找这个多项式的因式分解也就无从入手了。现在我们有了插值法和插值公式，就可以对这些因式分解问题给与一个有效能算的解法。下面的讨论且以一个 4 次多项式的因式分解作为特例说明，但易见其方法是可以作明显推广的。首先我们引进一些术语：

【定义】：一个整数系数的多项式 $f(x)$，若可以写成两个同样具有整数系数的<u>非常数</u>因式之乘积，则称 $f(x)$ 在整数系数内是可约的 (reducible over integer coefficients)。

【例 1】：$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ 是可约的。

【例 2】：x^2-2 在整数系数内是不可约的。虽然 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$，但是这个因式分解中用到非整数系数：$\pm\sqrt{2}$。

在下面的讨论中，我们都是假设所用到的系数皆为整数。让我们先来温习一下寻找一次因式的方法：

令 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 为一个 4 次多项式。我们不妨假设 $e\neq 0$，否则即可提出因式 x，并把情况简化到 3 次多项式的情形来讨论。若 $f(x)$ 具有 1 次因式 $(px+q)$，则易见 p,q 分别可整除 a,e：

$$f(x)=(px+q)(c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0)\quad\Rightarrow\ p\cdot c_3=a,\ q\cdot c_0=e$$

由于 a,e 的因数（包括正负）只有有限个选择，所以只需直接验算每一个可能情况，最後便可得知 $f(x)$ 是否具有 1 次因式。

【例 3】：若 $(px+q)$ 可整除 $f(x)=2x^4+3x^2+x-1$，则 p,q 必须分别整除 $2,1$，由此可见 (p,q) 的可能性为

$$(1,1),\ (1,-1),\ (2,1),\ (2,-1)$$

[注：$(-1,1)$ 对应 $(1,-1)$，此等情况可以不用再考虑。]运用馀式定理，我们只需分别验算

$$f(-1)=3\neq 0,\ f(1)=5\neq 0,\ f(-\tfrac{1}{2})=-\tfrac{5}{8}\neq 0,\ f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{3}{8}\neq 0$$

即知 $f(x)$ 没有一次因式。

现在让我们考虑 $f(x)$ 的 2 次因式。若 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的一个 2 次因式，即 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$，则 $f(-1)=g(-1)\cdot h(-1)$, $f(0)=g(0)\cdot h(0)$ 和 $f(1)=g(1)\cdot h(1)$，亦即 $g(-1)$, $g(0)$, $g(-1)$ 分别可整除 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$。因为 2 次多项式可以由其在三个相异位置的值所唯一决定，所以我们只需列出 $g(-1)$, $g(0)$ 和 $g(1)$ 的所有可能性，然後以插值公式写下相应的 $g(x)$，再验算此等 $g(x)$ 是否有为 $f(x)$ 的因式者，最後便可得知 $f(x)$ 是否具有 2 次因式了。

【例 4】：若 $g(x)$ 可整除 $f(x)=2x^4+3x^2+x-1$，则 $g(-1)$, $g(0)$ 和 $g(1)$ 分别可以整除 $f(-1)=3$, $f(0)=-1$ 和 $f(1)=5$，即

x	-1	0	1
$f(x)$	3	-1	5
$g(x)$	$\pm1,\pm3$	±1	$\pm1,\pm5$

不妨选定 $g(0)=1$，则总共有 16 种 $g(-1)$ 和 $g(1)$ 的组合：

	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$
1.	1	1	1
2.	1	1	-1
3.	1	1	5
4.	1	1	-5
5.	-1	1	1
6.	-1	1	-1

	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$
7.	-1	1	5
8.	-1	1	-5
9.	3	1	1
10.	3	1	-1
11.	3	1	5
12.	3	1	-5

	$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$
13.	-3	1	1
14.	-3	1	-1
15.	-3	1	5
16.	-3	1	-5

运用插值公式，把每一种组合所相应的 $g(x)$ 如下列出来：

1. 1
2. $-x^2-x+1$
3. $2x^2+2x+1$
4. $-3x^2-3x+1$
5. $-x^2+x+1$
6. $-2x^2+1$
7. x^2+3x+1
8. $-4x^2-2x+1$
9. x^2-x+1
10. $-2x+1$
11. $3x^2+x+1$
12. $-2x^2-4x+1$
13. $-2x^2+2x+1$
14. $-3x^2+x+1$
15. $4x+1$
16. $-5x^2-x+1$

耐心地逐个验算，我们便会发现上述所得的 13 个 2 次多项式皆不能整除 $f(x)$。由此可见，$f(x)$ 也没有 2 次因式。再者，因为 $f(x)$ 有 3 次因式等同于 $f(x)$ 有 1 次因式，所以我们其实已经证明了 $f(x)=2x^4+3x^2+x-1$ 是不可约的。

当然，选用 $x=-1,0,1$ 为插值点只是为了方便计算，它们并不是唯一的选择，亦即可以选取任意三个整数为插值点。另一方面，若要找出一个多项式有没有 3 次因式，则只需用到四个插值点的插值法。

其实，上述特例也列出了在 $x=-1,0,1$ 分别取值 $3,-1,5$ 的多项式所能具有的 2 次因式的所有可能性，亦即我们可以反过来写下有那些 4 次可约多项式能够在 $x=-1,0,1$ 取值 $3,-1,5$ 的所有可能性。当一个 4 次多项式不是其中之一时，即知它为不可约者（在整系数多项式中）。由此可见，插值法的用途广泛多样，重点在于其「插值想法」，并不只是在于其表达公式。

【思考题】：

(1) 在[例 3]中的寻找 1 次因式的方法能否一起合并入[例 4]的插值法之内？

(2) 在[例 4]的讨论中，$f(x)$ 于 $x=-1,0,1$ 取值 $3,-1,5$ 或 $3,1,5$ 这两种情况的讨论有没有分别？

(3) 试用插值方法寻找 $f(x)=2x^4-4x^3+x^2+3x+3$ 的因式分解。

(4) 设 $\ell(x)$ 为一个 4 次多项式，它在 $x=-1,0,1$ 上的值分别是 $-1,1,5$。问 $\ell(x)$ 可以写成什麽模样？

(5) 给定任意的整数 a,b，问 $f(x)=(ax+b)x(x+1)(x-1)+1$ 是否可约？

第 二 章

二项定理与泰勒公式

在多项式的运算中，把 $(x+y)^n$ 展开成单项式之和（即 $\sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} y^k$）的公式是有着根本的重要性的。例如在上一章讨论求和公式的时候，我们需要同时讨论 $S_f(x)$ 在 $x = k$ 和 $x = k+1$ 时的表达式，所以寻找 $(x+1)^n$ 的展开式就是一个关键的步骤。二项定理就是把上述 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} y^k$ 中的每个系数 c_k $(0 \le k \le n)$ 明确地表达出来。

泰勒公式在本质上其实就是二项定理的推广，它也是引进多项式的微分学的一个重要起点。

2.1 二项定理 (The Binomial Theorem)

当 n 为 $2, 3, 4, 5$ 等等这些较低的指数时，不难直接运用分配律归纳地写下 $(x+y)^n$ 的展开式：

$$
\begin{aligned}
&n = 0 : (x+y)^0 = 1 \\
&n = 1 : (x+y)^1 = x + y \\
&n = 2 : (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\
&n = 3 : (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
&n = 4 : (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\
&n = 5 : (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5
\end{aligned}
$$

假如把上述每个展开式中的 $x^{n-k}y^k$ 的系数分离出来，我们发现它们之间可以自然而然地排列成下述三角阵式，并且满足一种简单的构造规

律。这个三角阵式我们称之谓「贾宪三角」或「杨辉三角」，而在西方则称之谓「柏斯加三角」(Pascal triangle)。

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & \end{array} \tag{2.1}$$

例如在 $n = 3$ 时，其相应的系数集就是 $\{1, 3, 3, 1\}$，亦即

$$(x+y)^3 = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2y + \mathbf{3}xy^2 + \mathbf{1}y^3 \tag{2.2}$$

若将 (2.2)–式乘上 $(x+y)$，则用分配律可得

$$\begin{aligned} (x+y)^4 &= x \cdot (\mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2y + \mathbf{3}xy^2 + \mathbf{1}y^3) \\ &\quad + y \cdot (\mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2y + \mathbf{3}xy^2 + \mathbf{1}y^3) \end{aligned} \tag{2.3}$$

亦即

$$\begin{array}{rcccccccccc} (x+y)^4 = & \mathbf{1}x^4 & + & \mathbf{3}x^3y & + & \mathbf{3}x^2y^2 & + & \mathbf{1}xy^3 & + & (0y^4) \\ & (0x^4) & + & \mathbf{1}x^3y & + & \mathbf{3}x^2y^2 & + & \mathbf{3}xy^3 & + & \mathbf{1}y^4 \\ \hline = & \mathbf{1}x^4 & + & \mathbf{4}x^3y & + & \mathbf{6}x^2y^2 & + & \mathbf{4}xy^3 & + & \mathbf{1}y^4 \end{array}$$

由此可见，第五行 $(n = 4)$ 中的每个系数其实就是上一行 $(n = 3)$ 中的相邻系数之和（在首、尾补上两个零）。而在一般的情况，令

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k \tag{2.4}$$

则类似地可得

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = x \cdot (x+y)^n + y \cdot (x+y)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(C_k^n + C_{k-1}^n\right) x^{n+1-k} y^k \quad \text{（补上 } C_{n+1}^n = 0 = C_{-1}^n\text{）} \end{aligned} \tag{2.5}$$

另一方面，由 C_k^n 的定义式 (2.4) 得

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} x^{n+1-k} y^k \tag{2.6}$$

由此可得

$$C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n \quad (\Leftrightarrow C_k^{n+1} - C_k^n = C_{k-1}^n)$$

这个归纳递推公式 (inductive recurrence relation) 来表达那些系数与系数之间的关系，亦即可以用 $(x+y)^n$ 展开後的系数来表达 $(x+y)^{n+1}$ 展开後的系数。这也就是描述上述三角阵式的构造规律。

现在让我们从另一角度来看看上述递推公式的意义。先把某一个 $k \geq 0$ 固定不动，然後将 C_k^n 看成一个函数 $f_k(x)$ 在 $x = n$ 时的取值。易见

$$f_0(x) \equiv 1, \quad f_1(x) = x \quad (\text{因为 } C_1^n = n) \tag{2.7}$$

则前述的递推公式可以重新写成

$$f_k(n+1) - f_k(n) = f_{k-1}(n) \quad (\text{即 } C_k^{n+1} - C_k^n = C_{k-1}^n) \tag{2.8}$$

显然上述的讨论说明了

$$\triangle f_k(x) = f_{k-1}(x) \ \Leftrightarrow \ f_k(x) = S_{f_{k-1}}(x) \tag{2.9}$$

亦即上述所定义的一系列函数 $\{f_k(x),\, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ 刚好就是在前一章寻找求和公式时引入的特殊函数集 $\{g_k(x),\, k = 0, 1, 2, \ldots\}$。

【定理 2.1】二项定理 (The Binomial Theorem)：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k \tag{2.10}$$

而其中出现的二项式系数 (binomial coefficients) C_k^n 的明确表达式就是

$$C_k^n = g_k(n) = \frac{1}{k!} n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0! = 1) \tag{2.11}$$

【推论一】：$C_k^n = C_{n-k}^n$。

【推论二】：$\sum_{k=0}^{n} C_k^n = (1+1)^n = 2^n,\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n = (1-1)^n = 0$。

2.2 泰勒公式与多项式的局部展开式

设 $f(x)$ 为一个给定的多项式，a 为一个给定点。若我们把 x 局限于 a 的（足够小）邻近时，$f(x)$ 在这个范围的性质便称之为 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域的「局部性质」(local properties)。当我们研究 $f(x)$ 的局部性质时，宜以 $x=a+t$ 代入然後以二项定理把 $f(x)=f(a+t)$ 展开为 t 的升幂表达式，其中 $|t|$ 是足够小者，因而展开後的各项的绝对值乃是随著 t 的次数的升高而大幅缩小，因此它们的局部影响力显然是高次项要远小于低次项，可以说乃是「阶段分明，一目了然」者也。总之，这是一种常用、好用的办法，例如：

(i) $f(x)=x^3$：

$$f(a+t)=a^3+3a^2t+3at^2+t^3$$

(ii) $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$：

$$f(a+t)=(a^3-2a^2+5a+1)+(3a^2-4a+5)t+(3a-2)t^2+t^3$$

(iii) $f(x)=cx^n$：

$$f(a+t)=ca^n+nca^{n-1}t+\frac{n(n-1)}{2}ca^{n-2}t^2+\ldots+ct^n \tag{2.12}$$

由上述「局部展开」(local expansion) 的例子可见，引进下述对于多项式的形式运算[1] (formal operation) 将会有很大的用途：

【定义】：设 $f(x)$ 为任意给定的多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

定义算子 D 为把 $f(x)$ 变成下述多项式 $Df(x)$ 的形式运算：

$$Df(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}ia_ix^{i-1} \tag{2.13}$$

[1]形式运算：单纯在符号层面上的运算，其实质意义还有待确定。

再者，定义 D^k 为上述形式运算 D 的重复 k 次者。例如：

$$\begin{aligned} D^2 f(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-2} \\ D^k(x^n) &= n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k} = k!\, C_k^n x^{n-k} \end{aligned}$$

易证上述所定义的算子 D 满足下述简单好用的性质，即

$$D\big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big) = c_1 D f_1(x) + c_2 D f_2(x) \tag{2.14}$$

（事实上，D 本身就可以用上述性质和基本定义 $D(x^n) = nx^{n-1}$ 所唯一确定者。）

运用算子符号 D，我们可以把 (2.12)–式中的 $f(x) = cx^n$ 局部展开式重新写成下述非常简洁的形式，即

$$\begin{aligned} f(a+t) &= f(a) + Df(a)t + \frac{D^2 f(a)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{D^k f(a)}{k!}t^k + \ldots + \frac{D^n f(a)}{n!}t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(a)}{k!} t^k \end{aligned}$$

在 $f(x) = x^n$ 的特殊情形，上述公式其实就是二项定理的另一写法，也许大家会问这岂非仅是旧酒装新瓶的做法？但其实不然！上述公式乃是带领著我们迈向一个崭新的领域，它开启了进入微分学范畴的大门（详见第三章）。

【定理 2.2】多项式的泰勒公式 (Taylor's formula for polynomials)：
设 $f(x)$ 为一个 n 次多项式，则

$$\begin{aligned} f(a+t) &= f(a) + Df(a)t + \frac{D^2 f(a)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{D^k f(a)}{k!}t^k + \ldots + \frac{D^n f(a)}{n!}t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(a)}{k!} t^k \end{aligned}$$

[注]：上述局部展开式在 $k = n$ 时会自然终止，因为对于所有 $k > n = \deg f(x)$ 来说，$D^k f(x) \equiv 0$。

证明：我们采用归纳法按多项式次数 n 作归纳证明。$\deg f(x)=0$ 时的情况是显而易见的，现在归纳假设泰勒公式已对于所有次数不高于 $(n-1)$ 的多项式普遍成立。令 $f(x)$ 为任意一个 n 次的多项式，把 $f(x)$ 重新写成：

$$f(x)=cx^n+f_2(x)=f_1(x)+f_2(x),\quad \deg f_2(x)\le n-1 \tag{2.15}$$

则由归纳假设可得

$$f_2(a+t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k f_2(a)t^k \qquad (D^n f_2(a)=0) \tag{2.16}$$

由前述 cx^n 的展开式例子（即 (2.12)–式）：

$$f_1(a+t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k f_1(a)t^k \tag{2.17}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
f(a+t) &= f_1(a+t)+f_2(a+t)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k f_1(a)t^k+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k f_2(a)t^k\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\big(D^k f_1(a)+D^k f_2(a)\big)t^k\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}D^k f(a)t^k \quad \text{（即 (2.14)–式）} \qquad \square
\end{aligned}$$

【推论一】：当 $f(x)$ 被除以 $(x-a)^k$ 时，其馀式为：

$$f(a)+Df(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{(k-1)!}D^{k-1}f(a)(x-a)^{k-1}$$

证明：

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a+(x-a))=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}D^j f(a)(x-a)^j\\
&=\left\{\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j!}D^j f(a)(x-a)^{(j-k)}\right\}\cdot(x-a)^k+\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}f(a)(x-a)^j\right\} \quad \square
\end{aligned}$$

【推论二】：$f(x)$ 可被 $(x-a)^2$ 整除的充要条件为 $f(a)=0$ 和 $Df(a)=0$，即 $x=a$ 是 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 的公共根，亦即 $(x-a)$ 是 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 的一个公因式。

【推论三】：$D\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\big(Df(x)\big)\cdot g(x)+f(x)\cdot Dg(x)$。

证明：只需证明对任意 a 恒有

$$D(f\cdot g)(a)=Df(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot Dg(a) \tag{2.18}$$

由[推论一]知

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)\cdot(x-a)^2+[f(a)+Df(a)(x-a)] \\ g(x) &= q_2(x)\cdot(x-a)^2+[g(a)+Dg(a)(x-a)] \\ f(x)\cdot g(x) &= q_3(x)\cdot(x-a)^2+[f(a)\cdot g(a)+D(f\cdot g)(a)(x-a)] \end{aligned}$$

把上述的第一式和第二式相乘後可得

$$\begin{aligned} & f(x)\cdot g(x) \\ =& \big\{q_1(x)\cdot g(x)+q_2(x)\cdot[f(a)+Df(a)(x-a)]+Df(a)\cdot Dg(a)\big\}\cdot(x-a)^2 \\ & +\big\{f(a)\cdot g(a)+[Df(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot Dg(a)](x-a)\big\} \end{aligned}$$

现在，把上述两种 $f(x)\cdot g(x)$ 的展开式中的 $(x-a)$ 项作一比较，即得所求证的等式 $D(f\cdot g)(a)=Df(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot Dg(a)$，亦即

$$D(f\cdot g)=Df\cdot g+f\cdot Dg$$

□

【习题】：

(1) 试证明

$$D(f\cdot g\cdot h)=(Df)\cdot g\cdot h+f\cdot(Dg)\cdot h+f\cdot g\cdot(Dh)$$

(2) 试以归纳法证明

$$D[f(x)^n]=n[f(x)]^{n-1}\cdot Df(x)$$

(3) $D[(x^2+x+1)^5]=?$

(4) 试证 $D^2(f(x)\cdot g(x)) = D^2(f(x)) + 2D(f(x))D(g(x)) + D^2(g(x))$。问 $D^3(f(x)\cdot g(x)) = ?$ 能否给出 $D^n(f(x)\cdot g(x))$ 的公式？

【定义】：若 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)^2$，则称 a 为 $f(x)$ 的一个重根。若 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)^k, k \geq 2$, 而<u>不</u>含有因式 $(x-a)^{k+1}$，则称 a 为 $f(x)$ 的 k–重根。

[注]：若 $k=1$，则称 a 为 $f(x)$ 的一个单根。有时候为了方便讨论起见，我们会把单根的情况当作 1–重根来讨论。

(5) 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 的最高公因式，试证 a 为 $f(x)$ 的重根的充要条件就是 a 为 $d(x)$ 的根。

    [注]：所以，若 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 互素，亦即 $d(x) \equiv 1$，则 $f(x)$ 不可能有任何重根。

(6) 试证 a 是 $f(x)$ 的 k–重根 $(k \geq 2)$ 的充要条件乃是 a 是 $f(x)$ 的根和 $Df(x)$ 的 $(k-1)$–重根。

【定义】：给定某一点 $x=a$，若存在有一个足够小的 $\delta > 0$ 使得对于所有满足 $|x-a| < \delta$ 的 x 恒有

$$f(x) \geq f(a) \quad （\text{或 } f(x) \leq f(a)）$$

则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的局部极小点（或局部极大点）。

(7) 假设 $Df(a) = 0$ 及 $D^2f(a) > 0$（或 $D^2f(a) < 0$）。那麽 $x=a$ 是否 $f(x)$ 的一个局部极小点（或局部极大点）？为什麽？

(8) 设 $Df(a) = D^2f(a) = \ldots = D^{k-1}f(a) = 0$ 但 $D^kf(a) \neq 0$。$f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域的局部性质应是怎样？

    [提示：分开处理 k 为奇、偶数的情况。注意 $f(x)$ 与 $y = \dfrac{1}{k!}D^kf(a)\cdot(x-a)^k$ 在 $x=a$ 的邻域的局部性质极为相似。]

2.3 泰勒公式与局部分析：局部性质和局部逼近

从代数学方面来说，上一节所导出的多项式泰勒公式已经是二项定理的一个深远推广。其实，泰勒公式不单只是二项定理的一个推广公式，它也是研究一般函数局部性质的重要工具。在这一节里我们暂且集中讨论泰勒公式在多项式函数的应用，其研讨方法也自然而然地带领著我们迈向微分学的范畴。

局部性质和局部逼近 (local properties and local approximations)：

首先让我们清楚界定「局部性质」的明确意义。若一个给定函数 $y = f(x)$ 的某些性质只取决于该函数在 $x = a$ 的足够小邻近内的值（即只需把 $f(x)$ 局限于 $|x - a| < \delta$ 的范围内，其中 δ 为一个足够小的正实数），则称该性质为 $f(x)$ 在 $x = a$ 时的局部性质。例如：

(i) 我们称 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 时有「局部极小值」（或局部极大值）$f(a)$，其意义为

$$f(x) \geq f(a) \quad （\text{或 } f(x) \leq f(a)）$$

对于所有 x 在 $x = a$ 的足够小邻近内恒成立。

(ii) 我们称 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 的足够小邻近内是「递增」的（或递减的），其意义为

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad （\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2)）$$

能对于所有满足 $(a - \delta) < x_1 < x_2 < (a + \delta)$ 的 x_1, x_2 恒成立。

接著请同学们留意下述一个十分简单的事实。在应用泰勒公式于研究函数的局部性质的时候，它将会扮演著一个很常用的角色。

【基本事实一】：一个微小量的高次幂的绝对值要远比其低次幂的绝对值为小。例如，设

$$|\Delta x| \leq \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$$

则

$$|\Delta x^{k+\ell}| = |\Delta x|^{k+\ell} \leq 10^{-6\ell} \cdot |\Delta x^k|$$

亦即 $|\Delta x^{k+1}|$ 的值会小于 $|\Delta x^k|$ 的值的百万分之一。

在研究函数的局部性质时，我们惯用 Δx 来代表 $(x-a)$，并且会假设 $|\Delta x|$ 为足够小的值。所以，在研究多项式函数 $f(x)$ 于 $x=a$ 的局部性质时中，由泰勒公式所得的展开式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + Df(a)\cdot\Delta x + \frac{1}{2}D^2 f(a)\Delta x^2 + \ldots \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}D^k f(a)\cdot\Delta x^k \end{aligned}$$

我们容易看见下述另一个基本事实：

【基本事实二】：设 $D^k f(a)$ 为 $D^i f(a)$ $(1\le i\le n)$ 列中的<u>第一个</u>非零值，则

$$g(x) = f(a) + \frac{1}{k!}D^k f(a)\Delta x^k \quad (\Delta x = (x-a)) \tag{2.19}$$

为 $f(x)$ 于 $x=a$ 的一个「k–阶」的局部逼近函数，亦即

$$f(x) - g(x) = \sum_{\ell=k+1}^{n}\frac{1}{\ell!}D^\ell f(a)\Delta x^\ell \tag{2.20}$$

的绝对值要远比 $\frac{1}{k!}D^k f(a)\Delta x^k$ 的绝对值小。因此，有很多 $f(x)$ 的局部性质都会和逼近函数 $g(x)$ 的局部性质相同，所以我们不妨改用较为简单的 $g(x)$（一个 k 次的多项式函数）来研究 $f(x)$（一个次数至少为 k 的多项式函数）的那些局部性质。上述看似单纯的想法其实业已蕴含著很有用的局部逼近方法！

【引理一】：若 $Df(a)>0$（或 $Df(a)<0$），则 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的邻近范围是递增的（或递减的）。

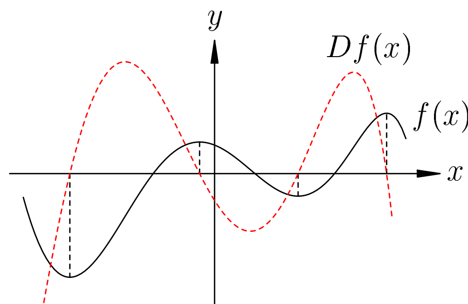
<u>证明想法</u>：$y=f(x)$ 可用下述函数来局部逼近：

$$f(a) + Df(a)\Delta x = f(a) + Df(a)\cdot(x-a)$$

当 $Df(a)>0$（或 $Df(a)<0$）时，上述函数显然会在 $x=a$ 邻近范围内递增（或递减）。[$Df(a)$ 实际上就是上述线性函数的斜率。] □

<u>单调区间和极大、极小点</u>：

给出一个 n 次多项式 $f(x)$，则 $Df(x)$ 为一个 $(n-1)$ 次多项式。若把整条实数轴以 $Df(x)$ 的（部分）零点分割为一些开区间线段，使得在每一个区间中 $Df(x)$ 维持其正负号不变（并假设由一个区间走向相邻区间时 $Df(x)$ 会改变其正负号），则由[引理一]易知 $y = f(x)$ 在每一个区间中恒为单调递增或单调递减（由 $Df(x)$ 在其上的正负号决定之）。我们把这些区间称为函数 $f(x)$ 的「单调区间」。再者，那些单调区间的分点 $\{a_j\}$ 乃是函数 $f(x)$ 改变其单调性的转向点，易见若 $f(x)$ 由 $\nearrow$ 改变为 $\searrow$，则转向点为其局部极大点；若 $f(x)$ 由 $\searrow$ 改变为 $\nearrow$，则转向点为其局部极小点。



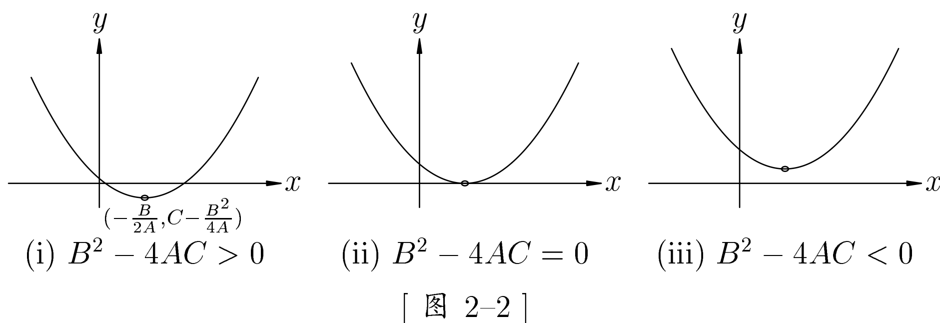
[图 2–1]

【例一】：$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C,\ A > 0$

$$Df(x) = 2Ax + B,\ \text{而在}\ a_1 = -\tfrac{B}{2A}\ \text{时}\ Df(a) = 0$$
$$a\begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} - \frac{B}{2A},\quad Df(a)\begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} 0$$
$$\Rightarrow\ a = -\frac{B}{2A}\ \text{乃是其极小点，而其极小值为}\ f(-\frac{B}{2A}) = C - \frac{B^2}{4A}$$

其实，二次函数的极值问题亦可以用配方法得之，即

$$f(x) = A(x + \frac{B}{2A})^2 + (C - \frac{B^2}{4A}) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq (C - \frac{B^2}{4A})$$



(i) $B^2-4AC>0$ (ii) $B^2-4AC=0$ (iii) $B^2-4AC<0$

[图 2–2]

【例二】：$f(x)=x^3+Bx^2+Cx+D$

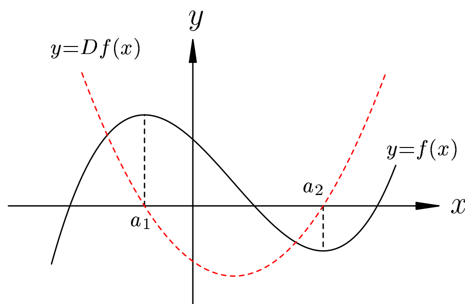
由[例一]的讨论，可见 $Df(a)$ 的正负区间有下述三种情形，即

$$\text{(i) } B^2-3C>0, \quad \text{(ii) } B^2-3C=0, \quad \text{(iii) } B^2-3C<0$$

我们现在分别讨论上述每一个情况：

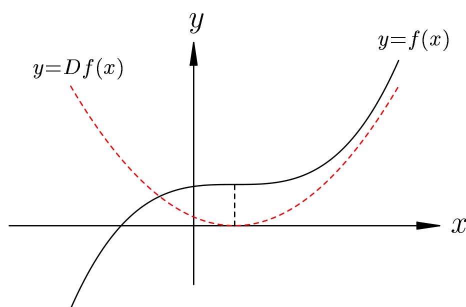
(i) $B^2-3C>0$：在此情况，$Df(x)=0$ 有两个相异的根 $\{a_1,a_2\}$。两者把实数轴分为三个 $f(x)$ 的单调区间，即

x		a_1		a_2	
$Df(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$



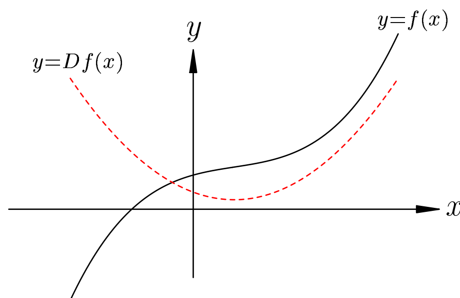
[图 2–3]

(ii) $B^2-3C=0$：在此情况，我们恒有 $Df(x)\geq 0$，因此 $f(x)$ 在整条实数轴上是单调递增的。



[图 2–4]

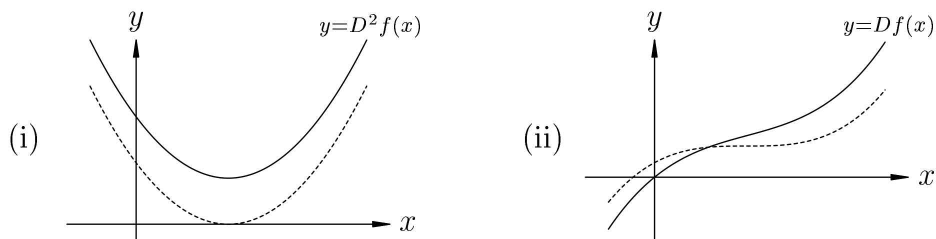
(iii) $B^2 - 3C < 0$：在此情况，恒有 $Df(x) > 0$，因此 $f(x)$ 在整条实数轴上是严格单调递增的。



[图 2–5]

【例三】：$f(x) = x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

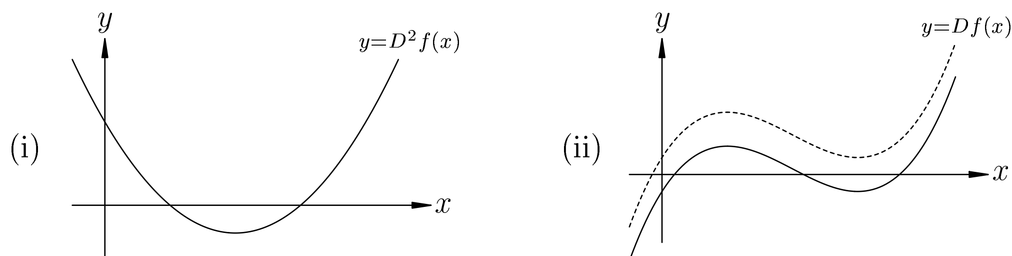
易见 $Df(x) = 4x^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$ 和 $D^2f(x) = 12x^2 + 6Bx + 2C$，我们依然尝试用二次的 $D^2f(x)$ 来把 $f(x)$ 分类。假设 $D^2f(x)$ 的样子是属于[例一]的 (ii) 或 (iii) 型，即如 [图 2–6(i)] 所示的虚线或实线图形：



[图 2–6]

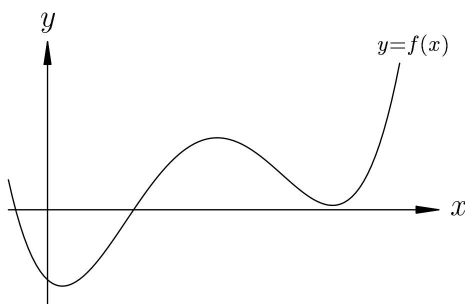
则 $Df(x)$ 的样子就会是如 [图 2–6(ii)] 所示者，亦即 $f(x)$ 在这两种情况

之下都只有两个单调区间。另一方面，假若 $D^2f(x)$ 的样子是[例一]的 (i) 型，即如 [图 2–7(i)] 所示者：



[图 2–7]

则 $Df(x)$ 的样子会如 [图 2–7(ii)] 所示，但有两种不同位置。当 $Df(x)$ 是 [图 2–7(ii)] 中虚线所示的位置，$f(x)$ 只有两个单调区间；而当 $Df(x)$ 是 [图 2–7(ii)] 中实线所示的位置，$f(x)$ 就会有四个单调区间，即如下图所示：



[图 2–8]

<u>函数的 k–阶局部逼近</u>：

在局部分析中，我们还可引入下述关于「微小量的阶」和「逼近的阶」的概念，即

【定义】：一个微小量 Δx 的函数称为「k–阶微小量」若它可写成 Δx^k 的常数倍再加上一些更高阶的微小量。

【定义】：一个函数 $g(x)$ 称为函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的「k–阶局部逼近」若 $|f(x) - g(x)|$ 为足够小的 Δx 的 $(k+1)$–阶微小量，$\Delta x = (x - a)$。

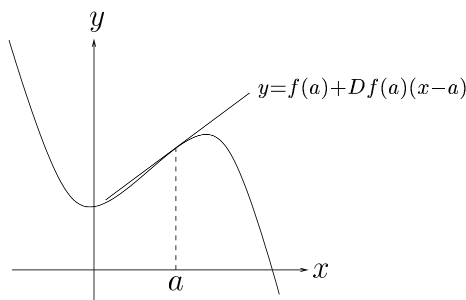
【例子】：

(i) 下述线性（即次数为 1）多项式函数

$$y = f(a) + Df(a)(x - a)$$

为 $y = f(x)$ 于 $x = a$ 的 1–阶局部逼近。

从几何方面来看，线性多项式的图象为一条直线。所以上述的线性局部逼近函数的图象就是在 $y = f(x)$ 的图象中于 $(a, f(a))$ 点的切线。



[图 2–9]

(ii) 下述函数

$$y = f(a) + Df(a)\Delta x + \ldots + \frac{1}{k!}D^k f(a)\Delta x^k = \sum_{j=0}^{k} D^j f(a)\Delta x$$

为 $y = f(x)$ 于 $x = a$ 的 k–阶局部逼近。

【习题】：

(1) 试找出下列多项式函数的单调区间：

(i) $y = x^2 + 2x - 3$

(ii) $y = -5x^2 + 20x - 14$

(iii) $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 17$

(iv) $y = x^3 - 3x^2 + 13x - 10$

(v) $y = 9x^4 - 34x^3 + 20x^2 + 50x - 6$

(2) 对于每一个在题 (1) 中所列出的多项式函数，若它们的极大点或极小点存在，试找出它们的所在位置。

(3) 令 $D^k f(a)$ 为 $D^i f(a)$ $(1 \leq i \leq n)$ 列中的第一个非零值。

(i) 设 k 为偶数。试证明 $x = a$ 其实是 $f(x)$ 的一个局部极值点。试讨论在什麼情况下它是一个局部极大点或局部极小点。

(ii) 设 k 为奇数。试证明当 $D^k f(a) > 0$ 时 $f(x)$ 是在 a 点邻近局部递增的；而当 $D^k f(a) < 0$ 时 $f(x)$ 是在 a 点邻近局部递减的。

(4) 设 $D^2 f(a) > 0$（或 $D^2 f(a) < 0$）。试证明 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 邻近的图象是位于其在 $x = a$ 的切线之上（或之下）。试描绘出以上两种情况的局部图象之相对位置。

(5) 若 $D^2 f(a) = 0$ 但 $D^3 f(a) \neq 0$，则 $f(x)$ 在 $x = a$ 的局部图象与 $f(x)$ 在 $x = a$ 的切线之相对位置如何？

(6) 在题 (5) 中所描述之点称为拐点。试求出题 (1) 的 (iii) 及 (iv)，以及第一章第一节习题内的 3 次多项式函数的拐点。

第 三 章

多项式函数的微积分

概括地来说，一个函数 $y = f(x)$ 所描述者，乃是一个变数的值如何随著另一个变数的改变而变化的方式。由此可见，函数的「变化速度」乃是有著根本的重要性。另一方面，从宏观的角度来说，函数的整体效应亦有著根本的重要性，它纪录了这个函数在某一个范围内所作的影响的「总和」。

在这一章中，我们将会对上述两种具有根本重要性的函数性质——「变率」与「总和」——做一次探本究源的工作。在多项式函数的范畴中，两者则分别对应于上两章所讨论的泰勒公式和求和公式。

3.1 变率与微分

首先让我们看看线性函数的情形作为简单例子。设 $y = Ax+B$，当 x 由 x_1 改变至 x_2 时，则相应会有 y 由 $y_1 = Ax_1+B$ 改变至 $y_2 = Ax_2+B$。因此 y 的改变值与 x 的改变值之间的比率为：

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{A(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = A \tag{3.1}$$

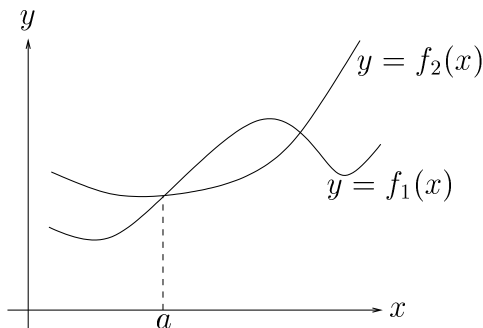
所以 $y = Ax + B$ 的「变率」就自然而然地定义为上述常数 A。反之，若某一个函数 $y = f(x)$ 在每一点的「变率」恒等于常数 A，则易见 $y = Ax + f(0)$。

但对于其他的多项式函数而言（即使像 $y = x^2$ 这样简单的函数），上面所计算的「x, y 改变值之比率」是会随著 (x_1, x_2) 的不同位置而不

同者，所以这类函数的「变率」其实还是一个「尚待定义」的概念！无论如何，现在让我们先来重新剖析一下「变率」这个概念的直观内含。

令 $y = f_1(x)$ 和 $y = f_2(x)$ 为两个函数，它们在 $x = a$ 点的值相同，即 $f_1(a) = f_2(a)$。设

$$\begin{cases} \text{当 } a-\delta < x < a, & f_1(x) < f_2(x) \\ \text{但当 } a < x < a+\delta, & f_1(x) > f_2(x) \end{cases}$$



[图 3–1]

亦即在 $x = a$ 点时 $f_1(x)$「从後赶上」$f_2(x)$ 而且超越之。在这个情况下，$f_1(x)$ 在 $x = a$ 的「变率」显然是不可能小于 $f_2(x)$ 在 $x = a$ 的「变率」的。假若不然，则我们在讨论的东西和「变率」的直观意义不符；换句话说，若所讨论的概念并不满足上述比较条件，则它绝不会是我们想要研究的「变率」！

或者同学们试想想下述一个实际例子：设有甲、乙两人在一条公路上作自行车竞赛，分别以 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 表示甲、乙在 x–秒後和起点的距离。设甲在 $x = a$ 时从後赶上乙而且超越之，亦即在 x 略小于 a 时，甲在乙之後；但是在 x 略大于 a 时，则甲在乙之前。则甲在 $x = a$ 时的「速率」显然不能小于乙者，要不然，则甲是不可能在 $x = a$ 时达成後来居上的，是不？

把上述直观上十分明显的事实，改用函数框架叙述之，即为下述刻划变率的直观内含的比较原则：

【变率的比较原则】(Comparison principle of rate of change)：

设有两个函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 满足 $f_1(a)=f_2(a)$，而且在 $x=a$ 的邻近具有下述大小关系，即对于一个足够小的 $\delta>0$,

$$\begin{cases} \text{当 } a-\delta<x<a, & f_1(x)<f_2(x) \\ \text{当 } a<x<a+\delta, & f_1(x)>f_2(x) \end{cases} \tag{3.2}$$

则 $f_1(x)$ 在 $x=a$ 的变率不小于 $f_2(x)$ 在 $x=a$ 的变率。

根据上述比较原则和已知的线性函数变率，我们将会证明多项式函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的变率就是 $Df(a)$。

【例一】：且让我们先以 $f(x)=cx^3$ 为例，用上述比较原则去研讨它在 $x=a$ 点的变率应该是什麼。因为一次函数的变率乃是已知者，我们可以把 $f(x)$ 和 $g(x)=ca^3+m(x-a)$（注意：$f(a)=g(a)$）来比较。令 $x=a+\delta$，则有

$$\begin{aligned} f(x) &= c(a+\delta)^3 = ca^3+3ca^2\delta+3ca\delta^2+c\delta^3 \\ g(x) &= ca^3+m\delta \\ f(x)-g(x) &= (3ca^2-m)\delta+\delta^2(3ca+c\delta) \end{aligned}$$

由此不难看到，当 $(3ca^2-m)\neq 0$ 时，只要把 $|\delta|$ 取得足够小，则 $(f(x)-g(x))$ 和 $(3ca^2-m)\delta$ 同号。所以由比较原则 (3.2) 即有

$$\begin{aligned} m>3ca^2 &\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x=a \text{ 点的变率} \leq m \\ m<3ca^2 &\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x=a \text{ 点的变率} \geq m \end{aligned}$$

所以「$f(x)$ 在 $x=a$ 点的变率」必须小于任何大于 $3ca^2$ 的 m，又必须大于任何小于 $3ca^2$ 的 m，所以唯有把它定义为 $3ca^2$ 才合乎上述比较原则。

【定理 3.1】：一个多项式函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的变率的唯一合理定义是 $Df(a)$。

证明：其实，只要把[例一]的方法的直接推广，就可以用来证明[定理 3.1]。给定一个实数 m，令

$$g(x)=f(a)+m(x-a) \tag{3.3}$$

另一方面，由 $f(x)$ 的泰勒展开式可得

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a)(x-a)^k \tag{3.4}$$

由此可见，令 $\delta = (x-a)$，则有

$$f(x) - g(x) = (Df(a) - m)\delta + \delta^2 \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) \delta^{k-2} \right) \tag{3.5}$$

同理，当 $(Df(a) - m) \neq 0$ 时，只要把 $|\delta|$ 取得足够小，则 $(f(x) - g(x))$ 和 $(Df(a) - m)\delta$ 同号。所以由比较原则 (3.2) 即有

$$m > Df(a) \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = a \text{ 点的变率 } \leq m$$
$$m < Df(a) \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = a \text{ 点的变率 } \geq m$$

所以「$f(x)$ 在 $x = a$ 点的变率」的唯一合理定义就是 $Df(a)$。 □

[注]：在上一章中，运算符号 D 只是形式上的运算，我们引进它来简洁地把二项定理推广成泰勒公式。而上述[定理 3.1]则说明了 $Df(x)$ 在分析学上的意义——它刚好就是记录著 $f(x)$ 在每一点上的变率。这种变率的概念其实可以推广至适用于更广泛的函数类，记录著一个一般函数的变率之函数我们称为该函数的「导函数」(derivative function)，而求出导函数的运算过程则称为「微分」(differentiation)。由此可见，在上一章的形式代数运算其实就是「多项式的微分」。至于如何把泰勒公式推广成能应用于更为广泛的函数类型，这正是整个微分学的基本骨干。

插值问题的推广：

在第一章中所讨论的插值问题，乃是要求待求公式必须在某些特定地方取某些特定值。但在实际的应用问题上，有时候还需要求待求公式的图象在该点有特定变率、特定曲率等等。例如：设有一个 4 次多项式 $f(x)$，它在 $x = \pm 1$ 和 $x = 2$ 三点的值已给定，而且其变率在 $x = \pm 1$ 时也给定，问能否唯一地确定 $f(x)$？换句话说，能否由下述五个给值条件唯一地确定一个 4 次多项式 $f(x)$？

$$f(-1),\ Df(-1),\ f(1),\ Df(1),\ f(2)$$

且以上述数值分别为 $9, -6, 1, 6, 27$ 为例说明其解法。

首先，在 $x = -1, 1, 2$ 分别取值 $9, 1, 27$ 的 2 次多项式 $g(x)$ 是可以用插值公式唯一地确定之，即

$$g(x) = 10x^2 - 4x - 5$$

留意 $f(x) - g(x)$ 在 $x = -1, 1, 2$ 这三点皆为 0，亦即 $f(x) - g(x)$ 必定具有因式 $(x+1)(x-1)(x-2)$。由于 $f(x) - g(x)$ 乃是 4 次多项式，易见有

$$f(x) - g(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(ax+b)$$

其中 a, b 为两个待定的系数，亦即

$$f(x) = (ax+b)(x+1)(x-1)(x-2) + 10x^2 - 4x - 5$$

对于上述 $f(x)$ 求导，即有

$$Df(x) = (ax+b)(x-1)(x-2) + (ax+b)(x+1)(x-2) + 20x - 4 + \dots$$

代入条件式 $Df(-1) = -6$, $Df(1) = 6$，得

$$-6 = Df(-1) = (-a+b)(-2)(-3) + 0 - 20 - 4 + 0 \Rightarrow -a + b = 3$$
$$6 = Df(1) = 0 + (a+b)(2)(-1) + 20 + 4 + 0 \Rightarrow a + b = 5$$

易解得 $a = 1, b = 4$。所以

$$f(x) = (x+4)(x^2-1)(x-2) + g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x + 3$$

【习题】：

(1) 试求出藏于半径为 r 的球体内的圆柱体之最大体积。

(2) 试求出藏于半径为 r 的球体内的圆锥体之最大体积。

(3) 试找出一个不高于 5 次 的多项式 $f(x)$，它满足下述条件：

$$f(-1) = 1$$
$$f(0) = 1,\ Df(0) = -1,\ D^2f(0) = 8$$
$$f(1) = 5,\ Df(1) = 14$$

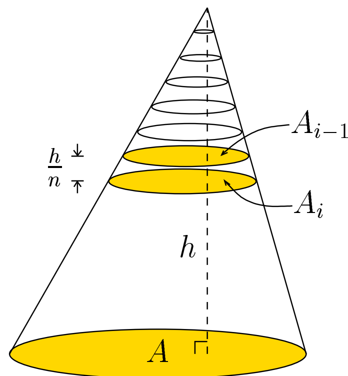
3.2 总和与积分

我们首先描述一个在历史上具有重要意义的例子，它应用了求和公式来解决了一个有基本重要性的几何问题。

假如我们用一个圆锥形的杯装水倒进一个同底同高的圆柱形的杯时，会发现需要三满杯圆锥形杯的水才可注满一个圆柱形杯。相信在古时从类似的实验也自然地引导古代中国和古希腊的几何学家发现了圆锥体的体积公式，亦即圆锥体体积为同底同高的圆柱体体积之三分之一。它是三角形面积公式的「高一维」推广，因为三角形面积就是同底同高的平行四边形的面积之一半。在二维的情况我们很容易就可以把一个平行四边形切割成两个全等的三角形，但是在三维的情况我们并没有这种简单的切割重组方法！相信有很多古希腊的几何学家曾努力尝试寻找类似的切割重组方法求证锥体的体积公式，但所有尝试皆终归失败，直至最後由 Eudoxus 开创了一套崭新的方法锥体体积公式才能成功得证。这其实是最早的一个具有基本重要性的积分，也是现代积分学之源起。

锥体体积公式的 Eudoxus 证明：

如 [图 3–2] 所示，一个底面积为 A、高度为 h 的锥体可以用平行于底面的平面切割成 n 块均一厚度的薄片：



[图 3–2]

由顶层向下数的第 i 块薄片，其底面积为 A_i，顶面积为 A_{i-1}。由相似

形定理，古希腊的几何学家已知

$$A_i : A = \left(\frac{i}{n}h : h\right)^2 = \left(\frac{i}{n}\right)^2, \quad 即\ A_i = \frac{i^2}{n^2}A \tag{3.6}$$

由此易知其第 i 块薄片之体积是介乎于 $\frac{h}{n}\cdot A_{i-1}$ 和 $\frac{h}{n}\cdot A_i$ 两者之间，亦即

$$\frac{h}{n}A_{i-1} = \frac{(i-1)^2}{n^3}hA < V_i < \frac{i^2}{n^3}hA = \frac{h}{n}A_i, \quad 1 \le i \le n \tag{3.7}$$

把上述的不等式整合起来，便得出

$$\frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 < \sum_{i=1}^{n}V_i = V < \frac{hA}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 \tag{3.8}$$

接著 Eudoxus 便应用已知的 $\sum i^2$ 求和公式把上式重写成

$$\frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) < V < \frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) \tag{3.9}$$

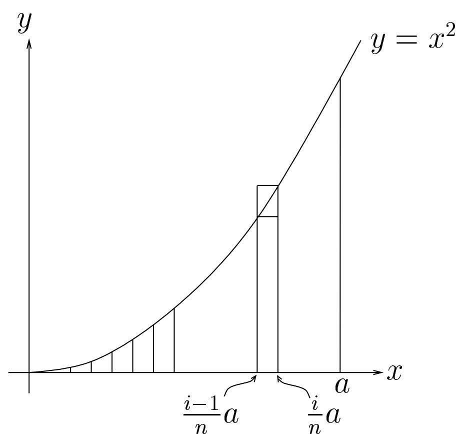
至此，Eudoxus 发现上述不等式对所有正整数 n 都成立，但无论 n 如何增大，V 的值（锥体体积）是不变的！而当 n 无限地增大时，上式的上限和下限之差别为

$$\frac{hA}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{hA}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{hA}{n} \tag{3.10}$$

这个量会无限地缩小（即可小于任意给出的正实数）。由此可见，唯一可以对所有 n 能满足上述不等式的量必定是 $\frac{hA}{3}$，因此得证

$$V = \frac{1}{3}hA \tag{3.11}$$

随後，古希腊的几何学家也用同样的方法来求得曲线 $y = x^2$ 底下的面积：



[图 3–3]

如 [图 3–3] 所示，图中被曲线 $y = x^2$、直线 $x = a$ 和 x–轴所包围的区域可被切割成 n 条均一阔度为 $\frac{1}{n}a$ 的窄条。由左数起第 i 条窄条的面积显然小于其外包矩形之面积，但大于其内含矩形之面积，亦即

$$\frac{a}{n}\left(\frac{i-1}{n}a\right)^2 = \frac{a^3}{n^3}(i-1)^2 < A_i < \frac{a^3}{n^3}i^2 = \frac{a}{n}\left(\frac{i}{n}a\right)^2, \quad 1 \le i \le n \tag{3.12}$$

再把上述 n 个不等式整合起来，即得

$$\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 < \sum_{i=1}^{n} A_i = A < \frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \tag{3.13}$$

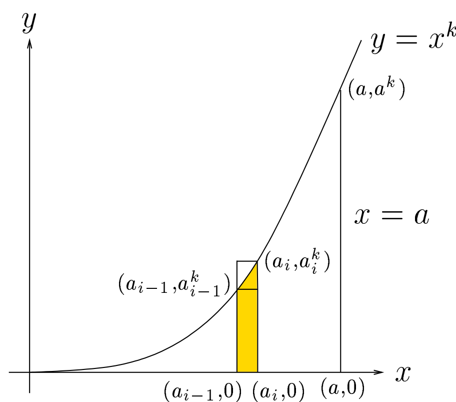
因此，运用同一求和公式可得

$$\frac{a^3}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) < A < \frac{a^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) \tag{3.14}$$

再以同样的论证，即得那个能满足所有以上不等式的 A 必定是 $\frac{a^3}{3}$，这样就证明了

$$A = \frac{a^3}{3} \tag{3.15}$$

显然这个方法是可以直接推广到求曲线 $y = x^k$、直线 $x = a$ 和 x–轴所包围的区域之面积，其值为 $\frac{a^{k+1}}{(k+1)}$。



[图 3–4]

证明：如 [图 3–4] 所示，由左边数起第 i 条窄条是夹于该两个矩形之间，其面积满足

$$\frac{a}{n}(\frac{i-1}{n}a)^k = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}(i-1)^k < A_i < \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}i^k = \frac{a}{n}(\frac{i}{n}a)^k,\ 1 \le i \le n \tag{3.16}$$

把上述不等式整合起来，得

$$\frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^k < \sum_{i=1}^{n}A_i = A < \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n}i^k \tag{3.17}$$

现在，我们需要运用第一章的求和公式来求得上述两个总和，即 $\sum_{i=1}^{n}(i-1)^k$ 和 $\sum_{i=1}^{n}i^k$。令

$$x^k = c_k g_k(x) + c_{k-1}g_{k-1}(x) + \dots \tag{3.18}$$

由比较 x^k 的系数即可得出 $c_k = k!$，因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{(n-1)} i^k &= (k!)\cdot g_{k+1}(n) + c_{k-1}g_k(n) + \dots \\ &= \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \text{至多是 } n \text{ 的 } k \text{ 次的项}\end{aligned} \tag{3.19}$$

所以

$$\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{i=0}^{(n-1)} i^k = \frac{1}{k+1} + \text{只含 } n \text{ 的负指数的项} \tag{3.20}$$

当 n 无限地增大时，那些负指数的项自然会无限地缩小，由此可得

$$A = \frac{a^{k+1}}{k+1} \tag{3.21}$$

用现今的积分记号，上式即可写成下述基本的多项式函数积分公式：

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1} \tag{3.22}$$

【习题】：

(1) 运用 $\sum_{i=0}^{(n-1)} i^3$ 的求和公式写出 $\int_0^a x^3 dx = \frac{a^4}{4}$ 的详细证明。

(2) 由曲线 $y = x^2 + x$、直线 $x = a$ 和 x–轴所包围的区域之面积为多少？

(3) 由曲线 $y = 4x^3 + 2x^2 + 4x$、直线 $x = a$ 和 x–轴所包围的区域之面积为多少？

(4) 由曲线 $y = 3x^4 + 2x^2$、直线 $x = a$、$x = b$ 和 x–轴所包围的区域之面积为多少？

第 四 章

线性方程组与行列式的基础理论

我们在前三章已经和同学们简明扼要地讨论了一元高次多项式的基础理论。现在让我们改弦更张，转为讨论多元代数表达式的基础理论。其中最为简朴者，当然就是多元一次的表达式；而其方程之求解，乃是同学们在小学和初中时期常常碰见的求解线性方程组 (system of linear equations) 是也。

求解线性方程组乃是代数学中的基本课题和必用、常用的基本功。在很多的代数解题方法中，例如待定系数法，我们必需通过一些联立方程来解出待定系数的值，而其中比较简单基本者，则往往是可以设法用线性方程组来表达之。同学们在小学和初中的阶段已熟习了运用代入法 (substitution) 和消元法 (elimination) 求解一些简单的联立方程，所以我们将先从这些简明的方法入手，作为研讨线性方程组的解法和基础理论的起点。

本质上，n–阶行列式乃是一个特定的 n^2 元、n 次多项式。它乃是在研讨 n 元线性方程组的基础理论中自然而然地发现者，而且在其中扮演著主角。本章将采取返璞归真的处理方式，引领同学们由二元、三元、四元逐步归纳、分析探索线性方程组和行列式的基础理论，作一次归纳发现、归纳定义和归纳论证，顺理成章的三结合。其实，在各种各样的多元高次多项式之中，大多数是无用者或是难以应用者；唯独有行列式，因为它所独有的优良性质，使得在不同的数学范畴的研讨中（包括代数、分析、几何），它都是一个不可或缺、精简好用的的重要工具。

4.1 代入法和消元法

让我们先来研讨一个线性方程组的解集究竟会出现那些可能性。若所涉及的线性方程组只是一个一元一次方程，即 $ax=b$，则结论非常简单：当 $a\neq 0$ 时，我们有唯一解 $x=b/a$；当 $a=0$ 但 $b\neq 0$ 时，方程无解；而当 $a=0$ 和 $b=0$ 时，则任何 x 都是解，亦即有无穷多解。

而同学们在小学中所碰见的「鸡兔同笼」问题，其实就是一种二个二元一次方程的求解。例如：笼中有鸡、兔共 36 只，而脚数共有 108 只，问鸡和兔各有多少只？设鸡数为 x，兔数为 y，则有

$$\begin{cases} x+y=36 \\ 2x+4y=108 \end{cases}$$

由第一式解得 $x=36-y$，再代入第二式中，得

$$\begin{aligned} 2(36-y)+4y &= 108 \\ 72+2y &= 108 \\ y &= 18 \end{aligned}$$

再将 $y=18$ 代回第一式中求得 $x=18$。所以鸡、兔各有 18 只。

既然「鸡兔同笼」可解，我们很自然会想到其它如「鸡鸭同笼」、「龟兔同笼」等等问题是否也同样可解？当我们尝试解一些实例时，便会发现事实并非如此，例如：若笼中有鸡、鸭共 36 只，而脚数共有 108 只，问鸡和鸭各有多少只？设鸡数为 x，鸭数为 y，则有

$$\begin{cases} x+y=36 \\ 2x+2y=108 \end{cases}$$

当我们由第一式得 $x=36-y$，而代入第二式时，却得出一个矛盾：

$$\begin{aligned} 2(36-y)+2y &= 108 \\ 72 &= 108 \quad !!! \end{aligned}$$

所以问题无解。又如笼中有龟、兔共 27 只，而脚数共有 108 只，问龟和兔各有多少只？设龟数为 x，兔数为 y，则有

$$\begin{cases} x+y=27 \\ 4x+4y=108 \end{cases}$$

当我们由第一式得 $x = 27 - y$，而代入第二式时，这次得出

$$\begin{aligned} 4(27-y)+4y &= 108 \\ 108 &= 108 \end{aligned}$$

所以第二式基本上是没有加上额外的限制，换句话说，只需要满足第一式就是方程组的解。这样，我们便会有很多解：如 $x = 0, y = 27$ 或 $x = 12, y = 15$ 等等都是解。

经过上述的讨论，我们可以看到在求解二个二元一次方程时仍然出现三种情况，即有唯一解、无解或有无穷多解；而且究竟是属于那种情况又和方程组的系数有著某种关系。

至于同学们需要对三个三元一次方程求解，一般会在高中时于讨论圆的坐标方程时遇到。例如：求过平面上给定三点 $(4, 2), (3, 5), (2, -2)$ 的圆的坐标方程。通常的解法是：我们设所求的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$（其实这就是一种待定系数法），则由所设可写出下列方程：

$$16 + 4 + 4D + 2E + F = 0 \tag{4.1}$$

$$9 + 25 + 3D + 5E + F = 0 \tag{4.2}$$

$$4 + 4 + 2D - 2E + F = 0 \tag{4.3}$$

现在我们可以用消元法来消去其中一元。例如，用 (4.2)–式减去 (4.1)–式及用 (4.2)–式减去 (4.3)–式後，我们便得出下述两式：

$$14 - D + 3E = 0 \tag{4.4}$$

$$26 + D + 7E = 0 \tag{4.5}$$

这样便消去了其中一元 F，变成二个二元一次方程的情形。再将上述两式相加（目的是消去 D），便得出：

$$40 + 10E = 0 \tag{4.6}$$

由此解得 $E = -4$。代入 (4.5)–式得 $26 + D - 28 = 0$，即 $D = 2$。最後，把 $E = -4, D = 2$ 代入 (4.3)–式得 $8 + 4 + 8 + F = 0$，求得 $F = -20$。因此该圆的坐标方程为 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$。

若所给定的（相异）三点并列在某一直线时，则由几何直观知问题应该无解。若所给定三点有其中两点相重时，则易见会有无穷多解。现在让我们再用另一个例子来研讨三个三元一次方程的解。试求下述三个平面在空间内的交集：

$$x + 2y - z = 1 \tag{4.7}$$

$$3x - y + 2z = 4 \tag{4.8}$$

$$x - 5y + 4z = 3 \tag{4.9}$$

用 (4.8)–式减去 (4.7)–式的 3 倍及用 (4.8)–式减去 (4.9)–式的 3 倍後，我们便得出下述两式：

$$-7y + 5z = 1 \tag{4.10}$$

$$14y - 10z = -5 \tag{4.11}$$

易见上述 y, z 的方程组无解。若把原来方程组的第三式 (4.9) 的常数项改为 2，即

$$x + 2y - z = 1 \tag{4.12}$$

$$3x - y + 2z = 4 \tag{4.13}$$

$$x - 5y + 4z = \mathbf{2} \tag{4.14}$$

则相应的 y, z 方程为

$$-7y + 5z = 1 \tag{4.15}$$

$$14y - 10z = -2 \tag{4.16}$$

上述的 y, z 方程组会有无穷多解，因此原本的方程组也会有无穷多解：例如 $x = \frac{6}{7}, y = \frac{4}{7}, z = 1$ 和 $x = \frac{9}{7}, y = -\frac{1}{7}, z = 0$ 等等都是其解。

所以，三个三元一次方程组也是有唯一解、无解和有无穷多解这三种情况，而且究竟是属于那一种情况又和方程组的系数集有著某种关系。再者，在方程组有唯一解的情况，该唯一解与方程组系数集之间理当有一种特殊的函数关联加以表达之；至于这种特殊的函数表达式究竟是如何，乃是我们将会在下一节详细探讨者也。

实给系数的多元一次方程组的求解：

其实，当一个多元一次方程组的系数乃是实给者，我们并不需要什麽特别的理论，就可以用代入消元法求解之，其原理简单明了，即：

(i) 选用其一，解得其中系数非零之一个变元，以其他诸元的线性表达式表达之；

(ii) 用它代入其他各式即可得方程个数和元数各减其一的多元一次方程组。

例如，设第一条方程 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1$ 满足 $a_{11} \neq 0$，由此即可解得

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(c_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n)$$

代入第 i–式 $(i \geq 2)$ 之所得就是：

$$(a_{i2} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{12})x_2 + \ldots + (a_{in} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1n})x_n = (c_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}c_1)$$

亦即将第 i–式换成：

$$(\text{第 } i\text{–式}) - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \times (\text{第 } 1\text{–式})$$

如此逐步代入消元，就可能会有下列两种蜕化 (degenerate) 情形发生，即：

其一：某一式变成两侧之系数都为 0；

其二：某一式变成左侧系数全为零，但是右侧常数项则不为 0。

前者出现的实质意义是：该式乃是那些选用来解元代入的方程式的线性组合，所以可以略去不计；而後者出现的实质意义则是：该式和那些选用来解元代入者是互相矛盾的，因此所给方程组是无解者也！所以後者一出现即可断言所给方程组无解，自然就不必再做徒劳无解的虚功。反之，设後者一直不出现，则所给方程组有解。

为了便于下面的叙述，我们不妨先行将方程和变元的编号作一调整，使得 $a_{11} \neq 0$；而且用第 1–式解得 x_1 代入消元之後的第 2–式的 x_2 的系数也不为零，即

$$a'_{22} = (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}) \neq 0$$

再者，以它解得 x_2 代入消元之後的第 3–式的 x_3 的系数又不为零。以此类推，在第 k 次代入消元後所得之 x_{k+1} 的系数依然不为零。如此逐步代入消元之所得者，乃是下述简单的方程组，它和原给者具有同解：

$$(*)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= c'_2 \\ a''_{33}x_3 + \ldots \quad &= c''_3 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \end{aligned}$$

若最後一个方程是 $a^*_{nn}x_n = c^*_n$，则可以用它解得 $x_n = c^*_n/a^*_{nn}$，然後逐步反代而求解 $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ 之唯一解。若最後一个方程是：

$$a^*_{m,m}x_m + \ldots + a^*_{m,n}x_n = c^*_m, \quad (m < n)$$

则可以用它解得

$$x_m = \frac{1}{a^*_{m,m}}(c^*_m - a^*_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a^*_{m,n}x_n)$$

它是将 x_m 表达成 $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ 的线性函数的一个表达式。将它逐步反代，即可解得 $x_{m-1}, \ldots, x_1$ 也表成 $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ 的线性函数的各别表式，亦即

$$\begin{cases} x_1 = \ell_1(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ x_2 = \ell_2(x_{m+1}, \ldots, x_n) \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_m = \ell_m(x_{m+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

乃是所给方程组之通解，其中 $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ 可以取任何之值，所以是有无穷多个解。

总结上述简短的讨论，即得下述对于多元一次线性方程组的基本认识：

1. 任何实给系数的线性方程组，都可以用代入消元法，逐步消元然後再逐步反代，直截了当地求解。

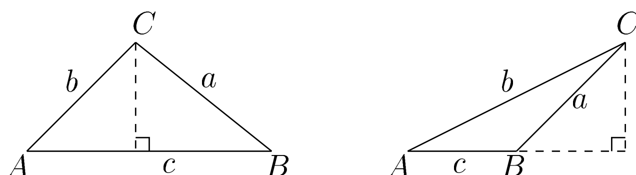
2. 线性方程组之解有三种情形，即唯一解、无穷多个解和无解，而它们都会在代入消元法中自然地确定之。

3. 代入消元法的具体运算，其实就是有系统地用所给方程组作适当的「线性组合」，把它转换成十分简单易解的 $(*)$–型式。其计算可以用系数的行、列之间的相应计算（亦即分离系数法）加以处理 [这也就是所谓高斯消元法 (gaussian elimination)，其实此法中国在宋元时代即以采用]。

【习题】：

(1) 在一个三角形 $\triangle ABC$ 中，易证其内角 A, B, C 和对边边长满足下述方程组

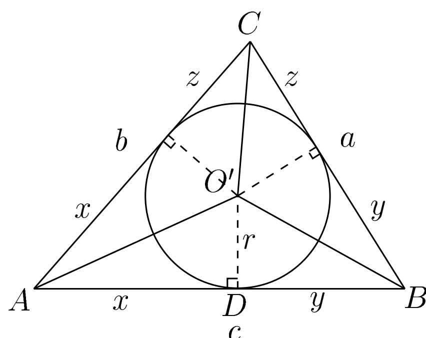
$$c = b\cos A + a\cos B$$
$$b = a\cos C + c\cos A$$
$$a = c\cos B + b\cos C$$



[图 4–1]

试由上述方程组解出 $\cos A, \cos B, \cos C$。

(2) 设 O 点为三角形 $\triangle ABC$ 的内心（内切圆圆心），x, y, z 如图所示为 O 在三边的垂足到 $\triangle ABC$ 顶点的距离，试以 a, b, c 表达 x, y, z。



[图 4–2]

(3) 求解下述线性方程组（如果有解）：

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=1 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=1 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{5}z=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ 3x+4y+5z=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+3y+5z=1 \\ 2x+4y+6z=4 \\ 3x+5y+7z=9 \end{cases}$$

(4) 在平面上四点 $(6,4)$, $(7,1)$, $(2,6)$, $(-1,-3)$ 是否共圆 (cocircular)？若是共圆的情形，求该圆之方程。

(5) 由一个二元一次方程式的所有解点为坐标之点构成一条直线。试讨论分别由两个二元一次方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

的解点组成的两条直线的交截的各种可能性。

4.2 二阶和三阶行列式

要找出前一节所述的唯一解与系数集之间的函数关联，我们便需要用抽象的方法去讨论，即假设方程组的系数为一些任给者，并探讨在什麼情况下该方程组会有唯一解，由此设法找出加于这些普遍系数身上的限制和特性。由于在方程组的系数中含有待定者，所以往常的代入法便无从入手，因不知何时某系数会蜕化为 0，那样便不能用其他变元来表达该变元了；同理在消元法中我们也要避免用到除法，所以在上一节所提到的「高斯消元法」者也不能在这里直接使用。

开宗明义，让我们首先明确所要研讨的基本问题，即：

线性方程组的基本问题：

「在什麼条件之下，一组 n 个 n 元线性方程具有唯一解？再者，在满足唯一解条件的情形，试求以方程组系数表达其唯一解组之公式。」

虽然在 $n=1$ 时的解答是很简单，但它提供了我们一个起点，所以我们先把这时的结果写出如下：

(4.17) $\qquad ax=b$ 当 $a\neq 0$ 时有唯一解，其解之公式为 $x=\dfrac{b}{a}$

接著让我们讨论 $n=2$ 的情形。设方程组为

$$a_1x+b_1y=c_1 \tag{4.18}$$

$$a_2x+b_2y=c_2 \tag{4.19}$$

若要求出 x 的解，我们首先要设法消去 y。这可以用下述方法做到：$b_2\times(4.18)-b_1\times(4.19)$；即有

$$\begin{aligned}(b_2a_1x+b_2b_1y)-(b_1a_2x+b_1b_2y)&=b_2c_1-b_1c_2\\ \Rightarrow\quad (a_1b_2-a_2b_1)x&=c_1b_2-c_2b_1\end{aligned}$$

所以，如果 $(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$，则 x 的解是唯一的。若 $(a_1b_2-a_2b_1)=0$，则 $a_1:b_1=a_2:b_2$，即 (4.18) 和 (4.19) 的左方只相差一个常数倍，所以是属于无解或是有无穷解的情形。至于 y 又怎样呢？我们可用同样方法，先消去 x 然後再看看 y 的系数，即由
$a_2\times(4.18)-a_1\times(4.19)$ 可得：

$$\begin{aligned}(a_2a_1x+a_2b_1y)-(a_1a_2x+a_1b_2y)&=a_2c_1-a_1c_2\\ \Rightarrow\quad (a_2b_1-a_1b_2)y&=a_2c_1-a_1c_2\end{aligned}$$

由此可见，同样的条件 $(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$ 也可以保证 y 的解是唯一的，亦即方程组有唯一解的充要条件就是 $(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$。而当这个条件成立时，x 和 y 的解是可以分别用下述公式表达之：

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \tag{4.20}$$

这个就是我们想探求者在 $n=2$ 时的情形。我们发现方程组的解的唯一性是取决于某一个量是否<u>不为</u> 0，亦即

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}\quad \text{当 } (a_1b_2-a_2b_1)\neq 0 \text{ 时有唯一解。} \tag{4.21}$$

上述结果和 $n=1$ 的情形 (4.17) 很类似。此点是否偶然？还是能够有其普遍推广呢？此事当然有待继续探讨，逐步由 $n=3,4,\ldots$ 归纳研究才有定论。为了方便以後的讨论，我们在此先引入二阶行列式的记号：

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1 \tag{4.22}$$

上述代数表达式称之谓该方程组系数的「二阶行列式」(determinant of order 2)，同学们暂且可以把它想成是 $a_1b_2 - a_2b_1$ 的另一种写法（我们也定义相应于 $ax = b$ 的「一阶行列式」为 a 本身）。当这个二阶行列式不为 0 时，x, y 就会有唯一解，而且其唯一解之公式就可以用上述符号如下表达之，亦即：

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{4.23}$$

接着让我们考虑 $n = 3$ 的情形。设方程组为

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \tag{4.24}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \tag{4.25}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \tag{4.26}$$

若 $c_2 \neq 0$，则可如下先消去 z：
$c_2 \times (4.24) - c_1 \times (4.25)$:

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = d_1c_2 - d_2c_1 \tag{4.27}$$

$c_3 \times (4.25) - c_2 \times (4.26)$:

$$(a_2c_3 - a_3c_2)x + (b_2c_3 - b_3c_2)y = d_2c_3 - d_3c_2 \tag{4.28}$$

再如下消去 y：
$(b_2c_3 - b_3c_2) \times (4.27) - (b_1c_2 - b_2c_1) \times (4.28)$:

$$\begin{aligned} &\big\{(a_1c_2 - a_2c_1)(b_2c_3 - b_3c_2) - (a_2c_3 - a_3c_2)(b_1c_2 - b_2c_1)\big\}x \\ =& \big\{(d_1c_2 - d_2c_1)(b_2c_3 - b_3c_2) - (d_2c_3 - d_3c_2)(b_1c_2 - b_2c_1)\big\} \end{aligned} \tag{4.29}$$

当我们展开上式中 x 的系数时，发现所得的 8 项之中只有 2 项是不含有 c_2 者，而且它们刚好互相抵消。同样情况亦出现在右方的常数项，所以我们可以提出公因子 c_2，并且把 (4.29) 重写成：

$$\begin{aligned} &c_2(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x \\ =& c_2(d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1) \end{aligned} \tag{4.30}$$

为何 c_2 会成为公因子呢？原因是当初我们用了两次 (4.25) 来消去 z，而其中 c_2 是乘了两次的。跟著我们可把不等于 0 的 c_2 约掉，并得出 x 有唯一解的充分条件为

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \neq 0 \tag{4.31}$$

上述 (4.31)–式可重写成

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \neq 0 \tag{4.32}$$

同学们请注意上式那些 $(b_2c_3 - b_3c_2)$ 其实是 y, z 某部分系数的二阶行列式。例如 $(b_2c_3 - b_3c_2)$ 是把 a_1 所在的行（(4.24)–式）和列（x 的系数）删掉而计算馀下系数的行列式。因此，由「後见之明」可以看到了一个更好的做法，即我们只需直接考虑：

$$(b_2c_3 - b_3c_2) \times (4.24) - (b_1c_3 - b_3c_1) \times (4.25) + (b_1c_2 - b_2c_1) \times (4.26)$$

则 y, z 就可以<u>一蹴而成</u>地全被消去，并且可以直接得出

$$\begin{aligned} &\left(a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right)x \\ &\qquad = d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.33}$$

（在此不需假设 $c_2 \neq 0$。）

上述有效的消元法让我们坚信 (4.32) 是比 (4.31) 更能突出其要点，而用 (4.32) 来定义「三阶行列式」要比用 (4.31) 来得顺当自然，即：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{4.34}$$

用上述三阶行列式符号来重写 (4.33)，即有：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{4.35}$$

而相对于 y 和 z 时的情形，我们同样可得（证明留作习题）：

$$(4.36)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

上述 (4.35)–式和 (4.36)–式便是著名的 Cramer's rules 在三个三元一次方程的情形。总结上述对于三元的讨论，即有：

$$(4.37)\qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad \text{当} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 时有唯一解。}$$

而且这个唯一解可以用 (4.35) 和 (4.36) 表达之。再者，

若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$，则 (4.35)–式和 (4.36)–式就是

$$(4.38)\qquad 0 \cdot x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad 0 \cdot y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad 0 \cdot z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

所以当右侧不为零时方程组 (4.24)—(4.26) 显然无解。再者，当右侧也为零时，则方程组 (4.24)—(4.26) 这三个之中，其中之一其实是另外二个的推论，所以不是无解就是有无穷多解。总之，在 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 时，方程组不是无解就是有无穷多解。

【习题】：

(1) 试用类似 (4.33) 的消元法证明 (4.36)–式。

(2) 试验证下述等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

(3) 试证明当三阶行列式 (4.34) 为零时，方程组 (4.24)—(4.26) 左方其中之一是另外二个的线性组合。

(4) 试用行列式写出在平面上三点 (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) 为共线 (collinear) 的代数条件式。由此再写出过 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 两点的直线方程。

(5) 试用行列式写下在平面上三条直线 $\ell_i : A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ 共交于一点 (concurrent) 的代数条件式。

4.3 四阶行列式

在讨论三元线性方程组时所发现的三阶行列式和「有效消元法」是否能够一般地推广呢？让我们再进一步去考虑四元线性方程组和四阶行列式的情形。在一般的中学课程中通常是不讨论四阶行列式的，但是行列式的重要性质要在这个阶段才明显地展现出来，其实应该要再进一步讨论四阶的情形。讨论四阶行列式的繁处在于其定义公式展开後共有 24 项，所以直接使用展开公式来讨论是颇为繁琐的。因此我们将改弦更张，放弃直接使用公式而采用归纳法探究其性质的研讨方法。唯有这样，才能顺理成章地建立起 n–阶行列式的基础理论。

总之，让我们接著考虑四个四元线性方程：

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w = e_1 \tag{4.39}$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 w = e_2 \tag{4.40}$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 w = e_3 \tag{4.41}$$

$$a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 w = e_4 \tag{4.42}$$

我们当然可以直接运用消元法来先消去 w，再消去 z，然後消去 y；这时，x 的系数便是所求的量。但是在 $n = 3$ 的情形我们已发现了一个更为有效的方法可以一蹴而成地消去其他变元，所以不妨依样画葫芦地

来试一试其法是否依然可行，即：

$$\begin{aligned}(4.43)\quad &\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (4.39) - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (4.40) \\ &+ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (4.41) - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \times (4.42)\end{aligned}$$

如上述方法是可行的，则 x 的系数便是我们所求的「四阶行列式」，亦即

$$\begin{aligned}(4.44)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\ &+ a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

上述依样试用的消元法所得的 y, z 和 w 的系数分别如下，所以此法是否依然可以一蹴而成地消去 y, z 和 w，则当然就取决于它们是否都自然而然地恒为 0！亦即

(4.45)

$$\begin{cases} b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0 \\ c_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0 \\ d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0 \end{cases}$$

现在让我们尝试验证 (4.45) 的第一式。用三阶行列式的定义，把左方展开成：

$$
\begin{aligned}
&b_1(b_2c_3d_4 - b_2c_4d_3 + b_3c_4d_2 - b_3c_2d_4 + b_4c_2d_3 - b_4c_3d_2)\\
-\ &b_2(b_1c_3d_4 - b_1c_4d_3 + b_3c_4d_1 - b_3c_1d_4 + b_4c_1d_3 - b_4c_3d_1)\\
+\ &b_3(b_1c_2d_4 - b_1c_4d_2 + b_2c_4d_1 - b_2c_1d_4 + b_4c_1d_2 - b_4c_2d_1)\\
-\ &b_4(b_1c_2d_3 - b_1c_3d_2 + b_2c_3d_1 - b_2c_1d_3 + b_3c_1d_2 - b_3c_2d_1)
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

耐心地展开上式，便会发觉项与项之间真的能逐对正负相消而恒等于 0。虽然我们可以同样地验证 (4.45) 的其馀两式，但预见过程也是同样麻烦，再者到了讨论五、六阶行列式时这种做法是愈来愈繁而不胜其繁者也。因此我们需要寻求的出路是对行列式的性质作深一层了解；亦即不再停留于其展开公式，而是对它的本质作深入探讨。

像 (4.45) 这类公式能够普遍地成立，我们相信此事决非纯属偶然，肯定应有其本质性的原因！因此我们应当去把其中隐藏的原因发掘出来。首先我们看到 (4.45) 的左方其实是比较特别的四阶行列式，用定义式 (4.44) 我们可以将它们分别改写成下述模样：

$$
\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},\quad
\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},\quad
\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ d_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}
\tag{4.47}
$$

可见它们全是有两列 (columns) 完全一样的四阶行列式。所以，若我们能够证明任何有两列全同的四阶行列式的值恒为 0（这种特性称之为「交错性」(alternating property)），则 (4.45) 就会普遍成立。可惜这个方法涉及寻找四阶行列式的确实数值，所以仍受著繁复公式的牵制；我们不妨避重就轻，改为研讨下述的「特性」：

「把一个行列式中的两列互换时，它的新旧值是否只相差一个负号？」

若上述特性（称之为「斜对称性」(skew-symmetric property)）能够普遍成立，则只需把两个全同之列互换，例如

$$
\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -
\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}
\tag{4.48}
$$

即得这个四阶行列式的值必为 0。同理，其馀两值也为 0，于是 (4.45)–式普遍成立，亦即「有效消元法」是可行的。现在让我们著手验证上述斜对称性。

[注]：交错性与斜对称性在一般抽象环、域的行列式理论中是有少许差别的，但在这里我们可以把它们当作同一样的概念。

对于二阶行列式，由其定义式 (4.22) 即知：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(b_1a_2 - b_2a_1) = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

所以斜对称性在 $n = 2$ 时成立。

对于三阶行列式，有 3 种互换方法要考虑，如互换第一列和第二列：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\ &= -(b_1a_2c_3 - b_1a_3c_2 + b_2a_3c_1 - b_2a_1c_3 + b_3a_1c_2 - b_3a_2c_1) \\ &= -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

同理可证馀下的两种互换方法，即互换第一列和第三列，及互换第二列和第三列。斜对称性在 $n = 3$ 时亦成立。

对于四阶行列式，上述的直接验证方法便很费时了。在此，我们将改用性质来证明。首先回顾四阶行列式的定义式：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1D_{1,1} - a_2D_{2,1} + a_3D_{3,1} - a_4D_{4,1} \tag{4.44'}$$

在这里我们引入了简约符号 $D_{i,j}$，它代表把原来的四阶行列式内的第 i 行 (i-th row) 和第 j 列 (j-th column) 删去後，所得的三阶行列式。例如

$D_{2,1}$ 就是：

$$D_{2,1}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

由上述重写的定义式 (4.44′) 可以看到，若在原来的四阶行列式中所互换的两列并不涉及第一列，则以上每一个 $D_{i,1}$ 也有相应的换列发生；由已知的 $n=3$ 的情形得知每个 $D_{i,1}$ 也转作 $-D_{i,1}$，因此原来的四阶行列式 D 也转为 $-D$。馀下只需验证涉及第一列的换列。

稍加分析後，我们只需集中讨论第一列和第二列的互换。例如，第一列和第三列的互换可用下述一串换列来得出：

0. 起始：　A—B—C—D
1. 互换第二列和第三列：　A—C—B—D
2. 互换第一列和第二列：　C—A—B—D
3. 互换第二列和第三列：　C—B—A—D

由于第 1 步和第 3 步都引入一个负号，所以其作用互相抵消；若可验证第 2 步也同样地引入一个负号，则涉及第一列的换列之验证便可完成。

在行列式的定义式 (4.44′) 中，第一列是有别于其馀各列的，因为用来写下定义式的系数是取于第一列者，而其他列的系数则全都统括在那些低一阶的子行列式内。所以，当第一列和第二列互换後，骤看起来定义式便会变得面目全非、难以处理。因此，我们先要做一些准备功夫，把那些三阶行列式再进一步分解下去，将原来四阶行列式的第二列系数也提出来，这样第二列和第一列系数便可以处于同等地位。例如：

$$\begin{aligned} D_{1,1}=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} &= b_2\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix}+b_4\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\ &= b_2D_{12,12}-b_3D_{13,12}+b_4D_{14,12} \end{aligned}$$

其中 $D_{14,12}$ 代表把原来的四阶行列式内的第 1 行和第 4 行、以及第一列和第二列删去後，所得的二阶子行列式。其他如 $D_{12,12}$ 和 $D_{13,12}$ 也类

似地定义之。当我们把在 $(4.44')$ 中的四个三阶子行列式全都如前述分解後，便得出：

$$
\begin{aligned}
&\text{原来的四阶行列式}, D \\
&= a_1\big(b_2 D_{12,12} - b_3 D_{13,12} + b_4 D_{14,12}\big) - a_2\big(b_1 D_{12,12} - b_3 D_{23,12} + b_4 D_{24,12}\big) \\
&\quad + a_3\big(b_1 D_{13,12} - b_2 D_{23,12} + b_4 D_{34,12}\big) - a_4\big(b_1 D_{14,12} - b_2 D_{24,12} + b_3 D_{34,12}\big) \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1) D_{12,12} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) D_{13,12} + (a_1 b_4 - a_4 b_1) D_{14,12} \\
&\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2) D_{23,12} + (a_4 b_2 - a_2 b_4) D_{24,12} + (a_3 b_4 - a_4 b_3) D_{34,12}
\end{aligned}
$$

由上式我们立即可看到若把 D 的第一列和第二列互换（即把 a_i 和 b_i 互换），则每个 $D_{ij,12}$ 保持不变，但其系数却都引进了负号，所以整体上 D 便转为 $-D$。斜对称性得证，所以「有效消元法」在 $n=4$ 时依然可行。

跟著我们再用「有效消元法」来从 (4.39)—(4.42) 一次地消去 x, z, w:

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (4.39) - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (4.40) \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \times (4.41) - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \times (4.42)
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

此时，x 的系数就是：

$$
a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}
$$

但由四阶行列式定义，上述表达式其实是：

$$
\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}
$$

由斜对称性知其值必为 0，所以 x 的确被消去。同理可证 z, w 也被消去，而除下 y 的系数则是：

$$b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

所以这个四阶行列式的值不为 0 也是 y 有唯一解的充分条件。类似地可得出 z 或 w 有唯一解的同一充分条件。由此即得下述结论：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1w = e_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2w = e_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3w = e_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4w = e_4 \end{cases} \quad \text{当} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 时有唯一解。}$$

而证明中的要点就是四阶行列式满足斜对称性：「若互换两列，则其值变号」。

再者，易见在上述四阶行列式非零的情形，(4.39)—(4.42) 的唯一解的公式如下：

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & e_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & e_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & e_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & e_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad \text{等等} \tag{4.50}$$

在 $D = 0$ 的情形，方程组不是无解就是有无穷多解的讨论则类似于 $n = 3$ 的情形，在此留作习题。

【习题】：

(1) 证明上式 (4.50)，亦即 Cramer's rules 在 $n = 4$ 的情形。

(2) 试证明当四阶行列式 (4.44) 为零时，方程组 (4.39)—(4.42) 左方其中之一是另外三个的推论。

(3) 试用行列式写出在平面上四点 (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 为共圆 (cocircular) 的代数条件式。

(4) 试用行列式写出在空间中四点 (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) 为共面 (coplanar) 的代数条件式。由此再写出过 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) 和 (x_3, y_3, z_3) 三点的平面方程。

(5) 试用行列式写下在空间中四个平面 $\Pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ 共交于一点的代数条件式。

第 五 章

行列式的基本性质与应用范例

在前一章中我们采用归纳法逐步发现三阶及四阶行列式的归纳定义式及验证其斜对称性，至此，我们当然也可以顺理成章，归纳地由 $(n-1)$–阶行列式类似地定义 n–阶行列式，然後再归纳地论证如此归纳定义所得者也具有列、列互换其值变号的斜对称性。

【历史的注记】：虽然直接给出 n–阶行列式的展开式来作定义也是可行的，但是这样便需要对排列群 (permutation group)（或称作对称群，symmetric group）有一定的认识才可以妥善地做好。因为五阶行列式展开後共有 120 项，六阶行列式展开後共有 720 项，而一般地 n–阶行列式展开後共有 $n!$ 项，所以对于初学者或是对排列群认识不深的人来说，直接使用展开式来作讨论是难以胜任自如的。想当年 Cramer 和 Vandermonde 乃是非常优秀的代数学家，而且他们对于排列群又有著深刻的认识，所以他们才直截了当地处理那个巨大的展开公式；但对于一般人来说，这样讨论行列式肯定是吃力难懂的。本章所采用的归纳法，返璞归真地来讨论行列式，既顺理成章地表现其本质，又简朴、易懂、好用。

5.1 n–阶行列式的归纳定义

总结前一章的三阶和四阶行列式的讨论，我们得见下述两点：

(i) 行列式可以用第一列的 n 个系数（即 $a_{i1}, 1 \leq i \leq n$），以交错的形式分别乘上其相应的低一阶的子行列式（即 $D_{i,1}, 1 \leq i \leq n$）後

，以其总和来加以归纳地定义；（这正是「有效消元法」的具体化）

(ii) 行列式具有斜对称性，即互换两列时，其值变号。

所以，现在让我们来正式地定义 n–阶行列式。考虑下述 n 个 n 元一次的线性方程组（$n \geq 3$）：

$$
\left\{\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}\right. \tag{5.1}
$$

由它的系数集所得的 n–阶行列式 D 则定义为

$$
\begin{aligned}
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11}D_{1,1} - a_{21}D_{2,1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}D_{n,1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}D_{i,1}
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

其中每一个 $D_{i,1}$, $1 \leq i \leq n$, 都是低一阶的子行列式，它们分别是把原来 n–阶行列式内的第 i 行和第 1 列删去，所得的 $(n-1)$–阶子行列式。例如，$D_{2,1}$ 就是如下把 D 的第 2 行和第 1 列删去，在式子最右方所示的 $(n-1)$–阶行列式，即：

$$
D_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5.3}
$$

注意上述是「归纳地」定义 n–阶行列式，亦即借助业已定义的 $(n-1)$–阶行列式来定义 n–阶行列式。其实在绪论中已和同学们提及，一个完整的归纳法应该可以分为下述三个步骤：

一、 归纳地发现具有某种有用特性的事物 (inductive discovery)；

二、 归纳地定义该事物 (inductive definition)；

三、 归纳地证明上述归纳定义者的确具有所应有之特性 (inductive proof)。

而其中的「归纳发现」则是最有意思也是最为重要的起步。若我们再看一看上一章对于四阶行列式的讨论，就会发现行列式所需要的「归纳定义」，以及其所需的「归纳证明」其实已经在「归纳发现」的过程中呼之欲出地展现著。

现在让我们来归纳地证明 (5.2) 所定义的 n–阶行列式就是我们所需求者，要点在于验证其斜对称性。归纳假设所有不高于 $(n-1)$–阶的行列式 $(n \geq 3)$ 业已具有斜对称性，我们把 n–阶行列式 D 的换列分成下述两种情形来考虑：

一、不涉及第一列的换列。

从定义式 (5.2) 可以直接看到，其中每一个 $D_{i,1}$ 也都有相应的换列，由归纳假设知道这种换列使得每一个 $D_{i,1}$ 变为 $-D_{i,1}$，而 a_{i1} 则全部不变，易见这种换列使得 D 变为 $-D$。

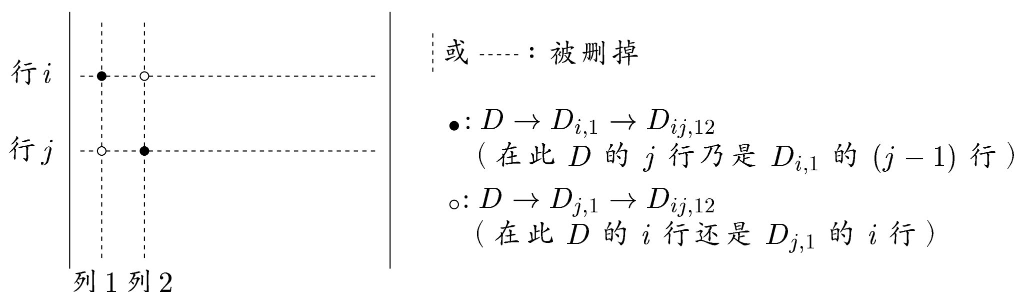
二、第一列和第 k 列的互换。

这个情况和在讨论四阶行列式的斜对称性证明时一样，我们只需集中讨论第一列和第二列的互换。而验证的方法则是把那些 $D_{i,1}$ 分别再用 $(n-1)$–阶行列式的归纳定义式展开成一些 $(n-2)$–阶子行列式（即 $D_{ij,12}$）的倍数和，然後研讨最後所得的展开式中每一个 $D_{ij,12}$ 的系数在上述换列後的变化。$D_{ij,12}$ 的定义是把 D 的第 i 行和第 j 行、以及第 1 列和第 2 列删去，所得的 $(n-2)$–阶子行列式。易见可以有下述两种途径得出含有 $D_{ij,12}$ 者：

(i) 从 $D_{i,1}$ 中删掉相对于 D 的第 j 行和第 2 列；

(ii) 从 $D_{j,1}$ 中删掉相对于 D 的第 i 行和第 2 列。

可参考下述图示：



[图 5–1]

我们不妨假设 $i < j$。在方法 (i) 中得出的 $D_{ij,12}$，其系数（在 D 的展开）为 $(-1)^{i+1}a_{i1} \cdot (-1)^j a_{j2}$；而在方法 (ii) 中得出的 $D_{ij,12}$，其系数为 $(-1)^{j+1}a_{j1} \cdot (-1)^{i+1}a_{i2}$。于是在 D 的展开中，$D_{ij,12}$ 是以下述形式出现：

$$D = \ldots + (-1)^{i+j+1}\big(a_{i1}a_{j2} - a_{j1}a_{i2}\big)D_{ij,12} + \ldots \tag{5.4}$$

由此可见，当 D 的第一列和第二列互换後（即 $a_{i1} \leftrightarrow a_{i2}, a_{j1} \leftrightarrow a_{j2}$），其展开中 $D_{ij,12}$ 的系数的改变为：

$$a_{i1}a_{j2} - a_{j1}a_{i2} \to a_{i2}a_{j1} - a_{j2}a_{i1} = -\big(a_{i1}a_{j2} - a_{j1}a_{i2}\big) \tag{5.5}$$

总括来说，当 D 的第一列和第二列互换後，在它的上述表成 $(n-2)$–阶子行列式 $D_{ij,12}$ 的展开中，每个 $D_{ij,12}$ 保持不变，但其系数则变号，所以整体上对 D 的影响乃是 $D \to -D$。斜对称性得证。 □

为了便于讨论 n–阶行列式的其他性质，在此引入列向量记号。令

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

而列向量的加和倍积运算是直接用其分量加以定义的，即

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \lambda\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} \\ \lambda a_{21} \\ \vdots \\ \lambda a_{n1} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

在这种符号体系下，我们把 D 重新写成：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \tag{5.8}$$

于是，当我们用下述「有效消元法」尝试从 (5.1) 中消去 $x_2, \ldots, x_n$ 时：

$$D_{1,1} \times (5.1.1) - D_{2,1} \times (5.1.2) + \ldots + (-1)^{n+1} D_{n,1} \times (5.1.n) \tag{5.9}$$

则得出 (5.9) 的左方为：

$$\begin{aligned} &\big(a_{11}D_{1,1} - a_{21}D_{2,1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}D_{n,1}\big)x_1 \\ &\quad + \big(a_{12}D_{1,1} - a_{22}D_{2,1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n2}D_{n,1}\big)x_2 + \ldots + \\ &\quad\quad + \big(a_{1n}D_{1,1} - a_{2n}D_{2,1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{nn}D_{n,1}\big)x_n \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)x_1 + \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)x_2 + \ldots + \det(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)x_n \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \qquad \text{（用 det 的斜对称性）} \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)x_1 \end{aligned}$$

而 (5.9) 的右方则为：

$$b_1D_{1,1} - b_2D_{2,1} + \ldots + (-1)^{n+1}b_nD_{n,1} = \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

所以，我们得出在一般情况下相对于 x_1 的 Cramer's rule：

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)x_1 = \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \tag{5.10}$$

而馀下的 Cramer's rules 亦可以类似地导出。至此，我们可以作下述结论：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{当 } D \neq 0 \text{ 时有唯一解。} \tag{5.11}$$

而当 $D = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \neq 0$ 时，其唯一解是可以用下述 Cramer's rules 表示之，即

$$x_i = \frac{1}{D}\det(\dots, \underset{i}{\mathbf{b}}, \dots), \quad 1 \le i \le n \tag{5.12}$$

其中 $(\dots, \underset{i}{\mathbf{b}}, \dots)$ 表示把 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ 的第 i 列换成 $\mathbf{b}$。

在此我们还得到一个常用、好用的推论，即

【推论】：n 个 n 元齐线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

具有非零解的条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.14}$$

至于当 $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$ 时 (5.1) 不是无解就是有无穷多解的证明和以往完全一样，在此留作习题。我们在前一章第二节开始时所研讨的基本问题，至此业已完全解决。

5.2 斜对称多线性函数与行列式的界定定理

一般来说，当我们对于某一问题或某一事物由表及里作深入探讨时，要点在于精益求精地掌握其本质和精要所在，所以在进一步研讨行列式时，我们的中心课题就是要对于行列式的各种各样性质作系统的整理。行列式的两个基本性质在于其斜对称性和多线性。

由行列式的定义式 (5.2) 易见它对于第一列是线性 (linear) 的，即：

$$\begin{aligned} &\det(\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &\qquad = \lambda\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) + \mu\det(\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \end{aligned} \tag{5.15}$$

运用其斜对称性，就可以把线性条件推广至其他各列，例如第二列：

$$\begin{aligned}&\det(\mathbf{a}_1,\, \lambda\mathbf{a}_2+\mu\mathbf{a}_2^*,\, \mathbf{a}_3,\ldots,\mathbf{a}_n)\\ &\qquad = -\det(\lambda\mathbf{a}_2+\mu\mathbf{a}_2^*,\, \mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_3,\ldots,\mathbf{a}_n)\\ &\qquad = -\lambda\det(\mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)-\mu\det(\mathbf{a}_2^*,\, \mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)\\ &\qquad = \lambda\det(\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n)+\mu\det(\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2^*,\ldots,\mathbf{a}_n)\end{aligned}$$

上述对于每列都是线性的特性称之为「多线性」(multilinear)，一般有下述定义：

【定义】：设 $f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)$ 为一个以向量为变元的多元函数。若对于每一个 j $(1\le j\le n)$，当 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{j-1},\mathbf{x}_{j+1},\ldots,\mathbf{x}_n$ 全部固定不动时，f 恒为 $\mathbf{x}_j$ 的线性函数，则称 f 为多线性函数。

所以行列式就是其 n 个列向量的斜对称多线性函数。我们再引入下述符号：

【定义】：令下述 n 个 n–维列向量为标准基底列向量：

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{e}_j=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\leftarrow j\text{ 处},\ \ldots,\ \mathbf{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \tag{5.16}$$

[注]：在不同大小的 n 之下，我们仍沿用 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$ 等同一符号，只要不会产生混乱便可。

现在我们证明下述定理，它说明了斜对称性和多线性两者基本上已经界定了行列式的基本性质：

【行列式界定定理】：设 $f(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)$ 为一个含有 n 个 n–维向量变元的函数，并满足斜对称性及多线性，则

$$f(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)=f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)\cdot\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n) \tag{5.17}$$

证明：令

$$F(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)=f(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)-f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)\cdot\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n)$$

易见 $F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ 也满足斜对称性及多线性，而且 $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 0$。我们要用上述三点推论 $F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \equiv 0$，其证明如下：

我们可以用标准基底列向量，把每个 $\mathbf{a}_j$ 写成它们的线性组合，即：

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a}_1 & = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n = \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1} \\ \mathbf{a}_2 & = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n = \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2} \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \mathbf{a}_j & = a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i_j=1}^n a_{i_j j}\mathbf{e}_{i_j} \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \mathbf{a}_n & = a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n = \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n} \end{array} \tag{5.18}$$

运用 F 的多线性，逐步把 F 如下的展开：

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) &= F\big(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}\mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\big) \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} F\big(\mathbf{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2}\mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\big) \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} F\big(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_n}\big) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} \ldots \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

在上述看来具有 n^n 项的展开式之中其实每一项都是 0，所以其总和还是 0。其理由如下：一方面当足标 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 之中有任何两个相同时，则由 F 的斜对称性可知其值必为 0。另一方面在 n 个足标都相异时，再由其斜对称性可得 $F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}) = \pm F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 0$。 □

行列式的定义公式是取第一列的系数来展开，这是因为我们前述的有效消元法目的是消去第二至第 n 变元；若要保留第二变元而消去其他变元，我们用的消元法就应该是以第二列系数来展开行列式（参考第四章第 70 页）。一般来说，我们可借助斜对称性，先把第一列和第 j

列交换後再展开，由此导出从第 j 列展开行列式的公式。例如 $j=2$：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= -a_{21}D_{2,1} + a_{22}D_{2,2} - \cdots + (-1)^{n+2}a_{n2}D_{n,2}$$

及一般 j：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1j} & \cdots & \overset{\text{列 } j}{\overset{\downarrow}{a_{11}}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{1j} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & \underset{\text{列 } j-1}{\underset{\uparrow}{a_{n1}}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{2j} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & \cdots & a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & \underset{\text{列 } j-1}{\underset{\uparrow}{a_{n1}}} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \ldots +$$

$$+(-1)^{n+2}a_{nj} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & \underset{\text{列 } j-1}{\underset{\uparrow}{a_{n-1,1}}} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1,j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2,j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{n,j}$$

由于 D 的第一列系数是在那些 $(n-1)$–阶子行列式的第 $(j-1)$ 列中，所以可利用 $(j-2)$ 次换列把它们全都移回各自子行列式的第一列，因而得出上述的等式。总括来说，把行列式对第 j 列展开有下述公式：

$$D = (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1,j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2,j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}D_{n,j} \tag{5.19}$$

5.3 行列式的常用基本性质

本质上，n–阶行列式乃是一个非常特出的多项式函数。它含有 n^2 个变元，其展开公式共计有 $n!$ 项，每项的次数是 n，亦即它是一个齐 n 次 n^2–元多项式函数。一般的这种多项式函数个数多过恒河沙数，绝大部分都是无用者，唯独行列式这个齐 n 次 n^2–元多项式在整个数学的基础理论中扮演重要的角色。究其原因，乃是它所具有的种种简洁美好的性质。在所有 n^2–元的多项式之中，行列式可以说是丽质天成，独一无二的精要所在。总之，行列式之所以重要、有用乃是它所独具的优良性质，所以学习行列式的要点当然也就是要抓好行列式的基本性质及其用法。

在基础数学中，行列式有两个自然的源起。其一就是我们在前面所研讨的 n–阶线性方程组的基础理论，其二则是我们即将在後面研讨的 n–维平行体（2–维的平行四边形和 3–维的平行六面体的自然推广）的高维有向体积 (high dimensional oriented volume)。而上述两者的结合又是多变数微积分基础理论之所基。由此可见，行列式不但具有简洁好用的基本性质，而且也自然地是代数、几何、分析这数学三大支柱的基石所在。由此可见行列式广泛而且基本的用场的梗概。

从上面行列式的两个自然出处，易见它的 n^2 个变元是自然而然地具有行、列的编排的（这也就是行列式这个名称的来由）。因此，在行列式基本性质的研讨中，自然应该把每一列（或每一行）的 n 个变元看成一个整体。我们将用 $\mathbf{x}_j, 1 \le j \le n$, 表示 j–列向量；$\overline{\mathbf{x}}_i, 1 \le i \le n$, 表示 i–行向量，亦即

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$$

在前面的讨论中，我们把行列式看成其 n 个列向量的函数，即 $\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$。由行列式的界定定理可见，下述三点业已构成行列式的一组特徵性质：

(i) 斜对称性：$\det(\ldots \mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_j \ldots) = -\det(\ldots \mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_i \ldots)$

(ii) 多线性：$\det(\lambda\mathbf{x}_1+\mu\mathbf{y}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)$

$$=\lambda\det(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)+\mu\det(\mathbf{y}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)$$

以及对于其他各列同此。

(iii) $\det(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)=1$

我们当然也可以把行列式看做它的 n 个行向量 $\{\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_n\}$ 的多项式函数，且以符号 $f(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_n)$ 记号之。我们很自然要问它是否也同样地具有上述三点基本性质？假如具有，则 $f(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_n)=\det(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_n)$。换言之，亦即行列式是否具有在 $x_{ij}\leftrightarrow x_{ji}$ 互换之下保持不变的行、列对称性？不难看到，在 $n=1,2,3$ 的情形是具有这种行、列互换，保持不变的对称性的。由此，我们当然又会想到用归纳法去研讨它是否普遍成立？由前面的经验可见，我们只要能够验证行列式也可以对于其第一行有下述展开公式，即

$$D=\left|x_{ij}\right|\overset{?}{=}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}x_{1j}D_{1,j}\tag{5.20}$$

假若上式得证，则可用完全同样的论证，归纳地证明 $f(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{x}}_n)$ 的斜对称性和多线性，而 $f(\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{e}}_n)=1$ 是显然的。兹验证 (5.20)–式如下：

<u>(5.20)–式之证明</u>：设 $\left|a_{ij}\right|\neq 0$，由行列式的斜对称性和其归纳定义式 (5.2) 可见

$$\det(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{e}_1,\mathbf{a}_{j+1},\ldots,\mathbf{a}_n)=(-1)^{j+1}D_{1,j}\tag{5.21}$$

再者，由方程组 (5.1) 在 $\mathbf{b}=\mathbf{e}_1$ 时唯一解的公式，即有

$$x_j=\frac{1}{D}\det(\ldots,\mathbf{e}_1,\ldots)=\frac{1}{D}(-1)^{j+1}D_{1,j}\tag{5.22}$$

将它代入 (5.1) 的第一式，即有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}D_{1,j}=1\tag{5.23}$$

亦即

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}D_{1,j}=D \tag{5.24}$$

对于任给 $|a_{ij}|\neq 0$ 的取值恒成立。因此 (5.20) 乃是 n^2–变元的恒等式。在这里，我们用到一个多项式代数中简单有用的事实，即一个 m 元多项式 $P(x_1,\ldots,x_m)$，若它在每个变元皆可相互无关地选用无穷多个取值使得 $P(x_1,\ldots,x_m)=0$，则 P 恒等于 0。此事乃是一个非零单元多项式至多只有有限个根的直接推论。 □

【推论】：行列式对于行向量也有同样的斜对称性和多线性。再者，它也有下述对于第 i 行的展开式

$$D=|x_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D_{i,j} \tag{5.25}$$

5.4 矩阵的乘法公式和行列式的乘法公式

在研讨矩阵运算 (matrix operations) 之前，我们先要提纲絜领地谈一谈什麽是抽象化？它的基本想法和做法为何？大体上来说，人类理性认知大自然的逐步过程不外乎实事求是地认识问题和解决问题，从此精益求精地寻求大自然至精至简的结构与规律，然後再用其所得的精简来以简御繁。可以说这也就是整个理性文明的一个简朴的概括。而在世代相承理性认知自然的途径中，抽象化和数理分析一直是行之有效的两种基本的方法论。当我们研讨某些基本问题时，确切认识该问题的本质和精要所在，当然是能否有效解决该问题的关键所在。其实，不但要由表及里，抓好问题的本质和精要所在（亦即择其精要），而且还要把它们妥加组织（例如各种各样数理模型 (mathematical models)）；这种把抽提所得的精要妥加组织之所得也就是原给问题的抽象化 (abstraction)。对于各种各样定量型的问题，其抽象化就往往是一种数理模型。所以抽象化往往和数理分析结合使用，而抽象化则是能够有效运用数理分析对于各种各样问题进行系统、有效的深入研讨的基础所在。显然，举例说明乃是解说抽象化这种方法论 (methodology) 的不二法门。本节所要讨论的矩阵运算也就是一个「抽象化」的实例。

在单元函数中，齐一次函数 $f(x) = c \cdot x$ 乃是最为简单基本的一种类型。数系的分配律在这种函数的表现就是：

「所有齐一次（单元）函数 $f(x)$ 皆满足下述两点，即：

$$\text{(i) } f(a+b) = f(a) + f(b), \quad \text{(ii) } f(k \cdot a) = kf(a) \tag{5.26}$$

反之，任何一个具有上述两个性质的函数也一定是齐一次的。」

亦即上述 (i), (ii) 两点乃是齐一次单元函数的特徵性质。在 n–元的情形，一个齐一次函数可以写成

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{5.27}$$

它的变域乃是所有 n–数串 (n-tuples) 所组成的集合，而它本身又被上述 n 个系数所组成的 n–数串 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ 所唯一确定。为了配合线性方程组的系统研讨，我们把一个横向排列的 n–数串想成是一个行向量，用一个简写符号

$$\overline{\mathbf{c}} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

表达之；而把一个纵向排列的 n–数串想成是一个列向量，用一个简写符号

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

表达之。而且用 $\mathbf{x}$ 表示以所有纵向 n–数串的集合为其变域的向量变元 (vector variable)。在此不难看到，假如我们在纵向 n–数串（亦即 n–维列向量）之间引进下述「加法」和「倍积」，即：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \qquad k \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

则前述单元齐一次函数的特徵性质就可以得到同样形式的推广。亦即

【引理】：$f(\mathbf{x})$ 是一个齐一次函数的充要条件是它满足下述两点，即

$$(5.26') \qquad \text{(i) } f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}), \quad \text{(ii) } f(k\mathbf{a}) = kf(\mathbf{a})$$

[证明]：<u>必要性</u>：设 $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$。则

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i + \sum_{i=1}^{n} c_i b_i \\ &= f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) \\ f(k\mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(ka_i) = k\sum_{i=1}^{n} c_i a_i = kf(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

<u>充分性</u>：设 $f(\mathbf{x})$ 满足 (i), (ii) 则

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i \mathbf{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad c_i = f(\mathbf{e}_i),\ 1 \le i \le n \end{aligned}$$

□

[注]：（一）上述简短的论证之中，主要是数系分配律的运用。

（二）在数学中，我们把上述 (5.26′)–式中的两点作为「线性函数」的定义条件式。再者，一个含有多个向量元的函数若对于其中每一个向量元皆各别满足上述两个条件式，则称之为「多线性函数」。例如 $\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ 就是一个多线性函数。

（三）上述简朴自然的「妥加组织」（即定义 n–数串之间的加法和倍积）使得分配律在线性函数上的表现更加简明、易用，乃是一种自然而然的抽象化。

5.4.1 矩阵运算

其实，我们还可以进一步定义一对横向 n–数串和纵向 n–数串之间的乘法，即

$$(5.29) \qquad \overline{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$$

则一个 n 元齐一次函数（亦即线性函数）就可以表达成

$$f(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{x}$$

这种十分精简的形式。而它的特徵性质（亦即 $(5.26')$–式）又变成：

$$\overline{\mathbf{c}} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \overline{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{a} + \overline{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{b}, \quad \overline{\mathbf{c}} \cdot (k\mathbf{a}) = k\overline{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{a}$$

这种惯用、好用的运算律。

我们可以把上述「乘法」想成是一个 $1 \times n$–矩阵和一个 $n \times 1$–矩阵之间的乘法。是否还可以进一步地定义一种 $m \times n$–矩阵和 $n \times \ell$–矩阵之间的乘法呢？首先让我们看一看 $\ell = 1$ 的情形。一个 $m \times n$–矩阵 $\big(c_{ij}\big)$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$，可以想成是 m 个 n 元线性函数的系数矩阵，它的 m 个行向量 $\overline{\mathbf{c}}_i, 1 \le i \le m$，就是它们各别的系数 n–数串。由此可见，m 个 n 元线性函数组可以简约地写成

$$(5.30) \qquad \big(c_{ij}\big) \cdot \big(\mathbf{x}\big) = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{c}}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \overline{\mathbf{c}}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{c}}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

由此可以想到一个 $m \times n$–矩阵 $\big(c_{ij}\big)$ 和一个 $n \times 1$–矩阵 $\mathbf{x}$ 之间乘法可以很自然地定义如下，即

$$(5.31) \qquad \big(c_{ij}\big) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n c_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

以上述定义为基础，我们就可以用下述思路去探索一般情形，$m \times n$–矩阵和 $n \times \ell$–矩阵的乘法应该如何赋予自然好用的定义。令

$$A = \big(a_{ij}\big), \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$$
$$B = \big(b_{jk}\big), \quad 1 \le j \le n,\ 1 \le k \le \ell$$

分别是 $m \times n$–矩阵和 $n \times \ell$–矩阵；$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{t}$ 分别是 $n \times 1$ 和 $\ell \times 1$ 的变元列向量。则

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix}, \quad B \cdot \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\ell} b_{1k}t_k \\ \sum_{j=1}^{\ell} b_{2k}t_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\ell} b_{nk}t_k \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

分别是由 m 个 n 元线性函数和 n 个 ℓ 元线性函数纵列而成的 $m \times 1$ 和 $m \times 1$ 矩阵。设想我们令 $\mathbf{x} = B \cdot \mathbf{t}$ 并以此代入 $A \cdot \mathbf{x}$，即得 m 个 ℓ 元线性函数，用

$$C = \big(c_{ik}\big), \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le k \le \ell$$

表示如此所得的线性函数串的系数矩阵，亦即有

$$A \cdot \mathbf{x} = A \cdot \big(B \cdot \mathbf{t}\big) = C \cdot \mathbf{t} \tag{5.33}$$

直接代入，用分配律展开集项即可算得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{\ell} b_{jk}t_k\right) = \sum_{k=1}^{\ell}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right) \cdot t_k \tag{5.34}$$

所以

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \tag{5.35}$$

由此可以想到 $A \cdot B$ 是以 (5.35) 所表达的 c_{jk} 为其 (i,k)–系数的 $m \times \ell$ 矩阵。这也就是我们所探讨的矩阵乘法公式。请注意，上述矩阵乘法仅仅在 $m \times n$–矩阵和 $n \times \ell$–矩阵之间才有定义！再者，在同一类型的矩阵之间，当然还可以赋予下述加法和倍积的定义。即

$$\begin{aligned} \big(a_{ij}\big) + \big(b_{ij}\big) &= \big(a_{ij} + b_{ij}\big) \\ \lambda\big(a_{ij}\big) &= \big(\lambda a_{ij}\big) \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \end{aligned} \tag{5.36}$$

容易验证上述三种矩阵运算满足下列运算律，即

$$\begin{aligned} &k \cdot (A_1 + A_2) = kA_1 + kA_2 \\ &A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 \\ &(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B \\ &(kA) \cdot B = kA \cdot B = A \cdot (kB) \end{aligned}$$

5.4.2 行列式乘法公式

当 A, B 都是 $n\times n$–矩阵时，$A\cdot B$ 也是 $n\times n$–矩阵而且有下述公式

【定理】：$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$

证明：现在我们先任意选定矩阵 A，然後考虑 $\det(AB)$ 为 B 的 n 个列向量 $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ 的函数。由以上矩阵乘积的表达公式可看到，

$$\begin{aligned}
&\det\left(A\left[\mathbf{b}_1\ \cdots\ (\lambda\mathbf{b}_j+\mu\mathbf{b}_j^*)\ \cdots\ \mathbf{b}_n\right]\right)\\
=&\det\left[A\mathbf{b}_1\ \cdots\ A(\lambda\mathbf{b}_j+\mu\mathbf{b}_j^*)\ \cdots\ A\mathbf{b}_n\right]\\
=&\det\left[A\mathbf{b}_1\ \cdots\ (\lambda A\mathbf{b}_j+\mu A\mathbf{b}_j^*)\ \cdots\ A\mathbf{b}_n\right]\\
=&\lambda\det\left[A\mathbf{b}_1\ \cdots\ A\mathbf{b}_j\ \cdots\ A\mathbf{b}_n\right]+\mu\det\left[A\mathbf{b}_1\ \cdots\ A\mathbf{b}_j^*\ \cdots\ A\mathbf{b}_n\right]\\
=&\lambda\det\left(A\left[\mathbf{b}_1\ \cdots\ \mathbf{b}_j\ \cdots\ \mathbf{b}_n\right]\right)+\mu\det\left(A\left[\mathbf{b}_1\ \cdots\ \mathbf{b}_j^*\ \cdots\ \mathbf{b}_n\right]\right)
\end{aligned}$$

因此 $\det(AB)$ 对列向量 $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ 是具有多线性的。再者，如有某些 $\mathbf{b}_k=\mathbf{b}_\ell$，则 $A\mathbf{b}_k=A\mathbf{b}_\ell$，所以

$$\det(AB)=\det\left[A\mathbf{b}_1\ \cdots\ A\mathbf{b}_k\ \cdots\ A\mathbf{b}_\ell\ \cdots\ A\mathbf{b}_n\right]=0 \tag{5.37}$$

亦即 $\det(AB)$ 对列向量 $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ 是具有斜对称性。由行列式界定定理得常数 K，使得：

$$\det(AB)=\det\left(A\left[\mathbf{b}_1\ \cdots\ \mathbf{b}_n\right]\right)=K\det\left[\mathbf{b}_1\ \cdots\ \mathbf{b}_n\right] \tag{5.38}$$

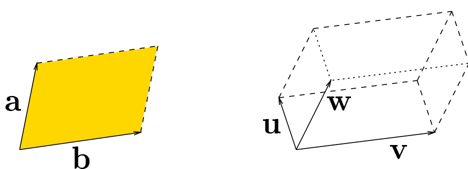
对所有的列向量 $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ 恒成立，其中 $K=\det A\big(\left[\mathbf{e}_1\ \cdots\ \mathbf{e}_n\right]\big)=\det A$。所以

$$\det(AB)=(\det A)(\det B) \tag{5.38$'$}$$

上述等式若直接用行列式的展开公式验证乃是很繁复和费劲的！

5.4.3 平行体体积与行列式

在平面上，两个不共线的向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 可以「张成」(span) 一个平行四边形；而在空间中，三个不共面的向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 可以张成一个平行六面体，如下图所示：



[图 5–2]

由简单的几何分析容易求得上述平行四边形的面积和平行六面体的体积，即

$$(5.39)\qquad \text{面积} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\sin\angle\mathbf{a},\mathbf{b})|,\quad \text{体积} = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|$$

在定义×–积或写出平行体体积公式时，还会引入行列式记号：

$$(5.40)\qquad \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},\quad \mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

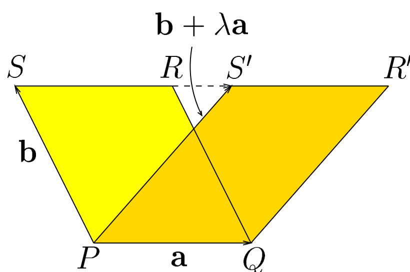
能用以上记号去表达体积是纯属碰巧，或是由于有某些本质上的原因呢？若我们只停留在讨论表面公式，是难以体认其本质的。现在，我们对行列式已有著一些本质上的认识，所以跟著也要对平行四边形面积、平行六面体体积找寻一些本质上的认识。

在平面上一个由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所张成的平行四边形，我们以 $\widetilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 表示其通常（恒取正值）的面积。不难看出 $\widetilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 是具有以下的基本性质：

$(\widetilde{\text{i}})$ 对称性：$\widetilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \widetilde{A}(\mathbf{b},\mathbf{a})$

$(\widetilde{\text{ii}})$ 拟比性：$\widetilde{A}(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\lambda|\widetilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \widetilde{A}(\mathbf{a},\lambda\mathbf{b})$

$(\widetilde{\text{iii}})$ 斜移不变性：$\widetilde{A}(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b},\mathbf{b}) = \widetilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \widetilde{A}(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mu\mathbf{a})$



[图 5–3]

[$\square PQRS$ 和 $\square PQR'S'$ 之间的变化只是将 $\overline{SR}$ 作平行滑动。从几何观点来看，两者为同底同高的平行四边形，所以面积应该相等。]

若在平面上先选定一个正角之转向，亦即其上的一个定向 (orientation)，而且定义 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所张成的平行四边形的有向面积 (oriented area) 为

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{5.41}$$

上述面积在由 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{b}$ 的转向为正时取正值，为负时取负值。易见有向面积 $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 满足下列基本性质，即

(i) 斜对称性：$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -A(\mathbf{b}, \mathbf{a})$

(ii) 比性：$A(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b})$

(iii) 斜移不变性：$A(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mu\mathbf{a})$

把上述两种面积函数相比较，骤看起来，$\widetilde{(\mathrm{i})}$ 略优于 (i) 而 (ii) 则略优于 $\widetilde{(\mathrm{ii})}$，似乎是半斤八两。但细加分析， 则 $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 远比 $\widetilde{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 优越！此事可以由下述结果充分说明其优越性：

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + A(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \tag{5.42}$$

<u>证明</u>：令 $\mathbf{e}$ 为在平面中使得 $\angle \mathbf{a}, \mathbf{e}) = \pi/2$ 的单位长向量，则可把 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 分解成垂直于 $\mathbf{a}$ 和平行于 $\mathbf{a}$ 的分向量之和如下：

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{e} + \mu_1\mathbf{a}, \quad \mathbf{c} = \lambda_2\mathbf{e} + \mu_2\mathbf{a}$$
$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{e} + (\mu_1 + \mu_2)\mathbf{a}$$

由此再连续使用性质 (ii), (iii) 即有

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) &= A(\mathbf{a}, (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{e}) && [\text{用 (iii)}] \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2)A(\mathbf{a}, \mathbf{e}) && [\text{用 (ii)}] \\
&= \lambda_1 A(\mathbf{a}, \mathbf{e}) + \lambda_2 A(\mathbf{a}, \mathbf{e}) && \\
&= A(\mathbf{a}, \lambda_1\mathbf{e}) + A(\mathbf{a}, \lambda_2\mathbf{e}) && [\text{用 (ii)}] \\
&= A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + A(\mathbf{a}, \mathbf{c}) && [\text{用 (iii)}]
\end{aligned}$$

因此，$A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是以向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为变元的函数，并满足斜对称性和多线性。所以由行列式界定定理得有常数 K，使得：

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = K \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{5.43}$$

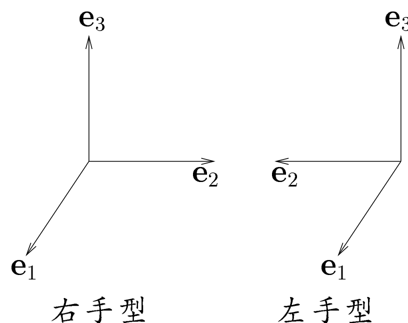
对所有列向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 恒成立，其中 $K = A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$，亦即

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{5.43'}$$

现在我们已看出平行四边形的面积和行列式的确有著本质上的直接关联。至于在平行六面体体积时的情况，亦能类似地把这个本质上的关联找出来。首先我们要讨论空间的定向问题。

空间的定向和平行六面体的定向体积：

一条直线只有两个方向，其定向就是选定其一为正向；一个平面上的转角方向也只有两个，其定向就是选取其一为正的转角方向。现在让我们来分析一下空间的「定向」应该如何定义。空间中的所有正交标架可以分成两类，即如下图所示的右手型和左手型，两个同型者可以用适当的平移和转轴的组合相互变换，而不同型者则无法如此相互变换。



[图 5–4]

再者，一个反射对称则把两种类型的正交标架互换。通常的做法是：空间的定向乃是在上述两种类型中选定其一为正向者，而一个由 $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 所张的平行六面体的定向体积之正负则由标架 $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 是正向型或负向型而定。在这样的空间的定向概念下，定向平行六面体的有向体积是一个满足下列基本性质的函数 $V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$：

(i) 斜对称性：$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = V(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -V(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -V(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -V(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$

(ii) 比性：$V(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 等

(iii) 斜移不变性：$V(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 等

再者，我们也可以同样地由 (ii) 和 (iii) 推导出下述结果：

$$V(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,\mathbf{v},\mathbf{w})=V(\mathbf{u}_1,\mathbf{v},\mathbf{w})+V(\mathbf{u}_2,\mathbf{v},\mathbf{w}) \tag{5.44}$$

证明：若 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 所张成的平行四边形不是 2–维的，则上述三个体积都是 0，所以上述等式当然成立。

若 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 所张成的是一个非蜕化的平行四边形，在其所在平面的两个单位长法向量中选定其一为 $\mathbf{e}$，把 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 分别分解成 $\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的倍积之和，即有：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1&=u_1\mathbf{e}+\lambda_1\mathbf{v}+\mu_1\mathbf{w}\\ \mathbf{u}_2&=u_2\mathbf{e}+\lambda_2\mathbf{v}+\mu_2\mathbf{w}\\ \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2&=(u_1+u_2)\mathbf{e}+(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{v}+(\mu_1+\mu_2)\mathbf{w}\end{aligned}$$

由此再连续使用性质 (ii), (iii) 即有

$$\begin{aligned}V(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,\mathbf{v},\mathbf{w})&=V\big((u_1+u_2)\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w}\big) &&[\text{用 (iii)}]\\ &=(u_1+u_2)V(\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w}) &&[\text{用 (ii)}]\\ &=u_1V(\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w})+u_2V(\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w})\\ &=V(u_1\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w})+V(u_2\mathbf{e},\mathbf{v},\mathbf{w}) &&[\text{用 (ii)}]\\ &=V(\mathbf{u}_1,\mathbf{v},\mathbf{w})+V(\mathbf{u}_2,\mathbf{v},\mathbf{w}) &&[\text{用 (iii)}]\end{aligned}$$

因此，$V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ 亦是以向量 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 为变元的斜对称多线性函数，所以存在常数 K，使得

$$V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=K\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \tag{5.45}$$

对所有 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 恒成立，其中 $K=V(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=1$，亦即

$$V(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \tag{5.45$'$}$$

所以，在一个 n–维的空间内，由 n 个向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 所张成的平行多面体的 n–维有向体积便自然而然地定义为

$$V(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n)=\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n) \tag{5.46}$$

5.5 行列式的几个应用范例

5.5.1 几何图形的坐标方程

在绪论中，我们讨论到用待定系数法把过平面上两点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 的直线方程，转化为下述线性方程组有非零解 $\{A, B, C\}$ 的条件式：

$$\begin{cases} x_1 \cdot A + y_1 \cdot B + 1 \cdot C = 0 \\ x_2 \cdot A + y_2 \cdot B + 1 \cdot C = 0 \\ x \cdot A + y \cdot B + 1 \cdot C = 0 \end{cases} \tag{5.47}$$

由行列式的理论即得上述方程组有非零解的充要条件为：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.48}$$

同理，在空间中过三点 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) 的平面坐标方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 满足

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases} \tag{5.49}$$

把上述方程组和 $Ax + By + Cz + D = 0$ 想成以 A, B, C, D 为变元的线性方程组，亦即

$$\begin{cases} x_1 \cdot A + y_1 \cdot B + z_1 \cdot C + 1 \cdot D = 0 \\ x_2 \cdot A + y_2 \cdot B + z_2 \cdot C + 1 \cdot D = 0 \\ x_3 \cdot A + y_3 \cdot B + z_3 \cdot C + 1 \cdot D = 0 \\ x \cdot A + y \cdot B + z \cdot C + 1 \cdot D = 0 \end{cases} \tag{5.50}$$

则该平面的坐标方程为

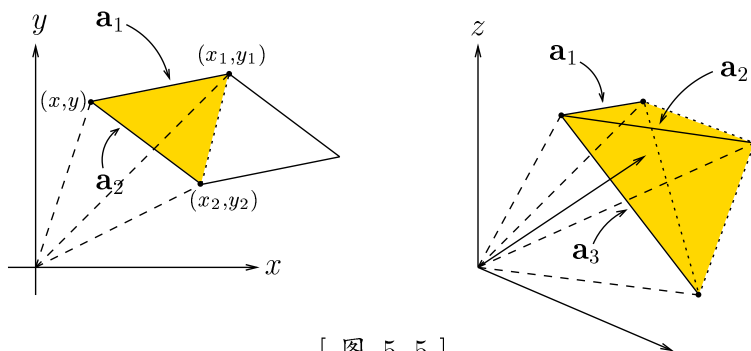
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.51}$$

从另一个角度来看，上述直线、平面方程亦可想成是三点共线、四点共面的条件；而容许满足条件的第三点 (x, y) 或第四点 (x, y, z) 随意走动，则可得出代表该直线或平面的方程。

[注]：上述所得的行列式其实和该三点所定的三角形面积（或该四点所定的四面体体积）有关。例如，把 (5.48)–式里的行列式的第一行和第二行分别减去第三行，再从第三列展开可得

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & 0 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix}$$

而上述的二阶行列式就是向量 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \end{bmatrix}$ 所张成的平行四边形面积，如下图（左）所示：



[图 5–5]

因此，

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{以 } (x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2) \text{ 为顶点} \\ \text{的三角形的有向面积的二倍。} \end{array}$$

所以，三点共线的条件就是此三角形面积为 0。同理亦可求得

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{以 } (x,y,z),(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3) \\ \text{为顶点的四面体的有向体积的六倍。} \end{array}$$

亦即四点共面的条件就是此四面体的体积为 0。而过五点的二次曲线的

方程（亦即六点共在同一二次曲线上的条件式）可以写成：

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \\ x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.52}$$

5.5.2 行列式与插值公式

在第一章的讨论中，我们已求得 Lagrange 插值公式，即在相异位置 $\{a_i, 0 \le i \le n\}$ 取值 $\{b_i, 0 \le i \le n\}$ 而次数不高于 n 的多项式 $f(x)$ 为：

$$f(x) = b_0f_0(x) + b_1f_1(x) + \cdots + b_nf_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_if_i(x) \tag{5.53}$$

其中

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\cdots(a_0-a_n)} = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)\Big/\prod_{i=1}^{n}(a_0-a_i) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_j(x) &= \prod_{i\neq j}(x-a_i)\Big/\prod_{i\neq j}(a_j-a_i) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) &= \prod_{i=0}^{n-1}(x-a_i)\Big/\prod_{i=0}^{n-1}(a_n-a_i) \end{aligned}$$

上述公式稍嫌繁复，难于处理。现在不妨采用前述的待定系数法以行列式写下 $f(x)$ 系数集 $\{c_k, 0 \le k \le n\}$ 的条件方程组

$$\begin{aligned} -y + \sum_{k=0}^{n} x^kc_k &= 0 \\ -v_j + \sum_{k=0}^{n} a_j^kc_k &= 0, \quad 0 \le j \le n \end{aligned} \tag{5.54}$$

把它们想成以下述 $(n+2)\times(n+2)$ 方阵为其系数矩阵的齐次线性方程组

$$(5.54')\qquad \begin{pmatrix} -y & 1 & x & \dots & x^n \\ -v_0 & 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_j & 1 & a_j & \dots & a_j^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_n & 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

则它具有非零解 $(-1, c_0, \dots c_n)$ 的充要条件就是上述方阵的行列式等于 0，亦即

$$(5.55)\qquad \begin{vmatrix} -y & 1 & x & \dots & x^n \\ -v_0 & 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_j & 1 & a_j & \dots & a_j^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_n & 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$$

把上述行列式以第一列 (first column) 展开，遍除以 $(-y)$ 的系数子行列式，再用熟知的 Vandermonde 行列式公式即得回 Lagrange 公式

$$(5.53')\qquad -y + \sum_{k=0}^{n} v_k f_k(x) = 0$$

所以 (5.55) 和 (5.53) 是相通的两种插值公式（验算留作习题）。

插值问题的推广：

在第三章中（见第 46 页）讨论的广义插值问题，即除了要求 $f(x)$ 在给定位置取某些给定值之外，还要求它在给定位置有特定变率、特定曲率等等，我们是用插值公式先行求得一个在前述给定位置取给定值的 $g(x)$，然後用它来简化待求公式 $f(x)$ 的样子。因为 $f(x)-g(x)$ 已经在前述的给定位置取零为值，所以它必定具有某些特定的因式，由此再用给定的变率、曲率等值去确定馀下的未知数的值。

从上述用行列式的解题方法可以看到，其实我们不必分开处理给定值、给定变率、给定曲率等等的条件，只需对应于每一个给定条件写

下一个条件式，然後要求所得的条件方程组具有非零的系数解，亦即其系数方阵的行列式等于 0，就可以写下一个 $f(x)$ 的公式。例如，求一个次数不高于 4 的多项式 $f(x)$，它满足

$$f(-1) = 9,\ Df(-1) = -6,\ f(1) = 1,\ Df(1) = 6,\ f(2) = 27$$

设 $f(x)$ 的样子是 $-y + c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 = 0$，则 $Df(x)$ 的样子就是 $-Dy + c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 = 0$。即有下述条件方程组：

$$\begin{pmatrix} -y & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ -9 & 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 & (-1)^4 \\ 6 & 0 & 1 & 2(-1) & 3(-1)^2 & 4(-1)^3 \\ -1 & 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ -6 & 0 & 1 & 2(1) & 3(1)^2 & 4(1)^3 \\ -27 & 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.56}$$

上述方程组具有非零解 $(-1, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4)$ 的充要条件是其系数行列式等于 0，亦即

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ -9 & 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 & (-1)^4 \\ 6 & 0 & 1 & 2(-1) & 3(-1)^2 & 4(-1)^3 \\ -1 & 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ -6 & 0 & 1 & 2(1) & 3(1)^2 & 4(1)^3 \\ -27 & 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.57}$$

把上述行列式展开後即有

$$-y + 3 - 6x + x^2 + 2x^3 + x^4 = 0 \tag{5.58}$$

亦即 $f(x) = 3 - 6x + x^2 + 2x^3 + x^4$。

特别地，当所有条件式都集中在某一个特定位置时，例如

$$f(0) = v_0,\ Df(0) = v_1,\ \ldots,\ D^nf(0) = v_n \tag{5.59}$$

则对应的行列式条件式就是

$$\begin{vmatrix} -y & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ -v_0 & 1 & 0 & 0^2 & \dots & 0^n \\ -v_1 & 0 & 1 & 2(0) & \dots & n(0)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_j & 0 & \dots & j! & \dots & \frac{n!}{(n-j)!}(0)^{n-j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_n & 0 & 0 & \dots & 0 & n! \end{vmatrix} = 0 \tag{5.60}$$

把上述行列式展开後所得者其实就是泰勒公式。

5.5.3 圆锥截线交点与求解四次方程

在一般位置的圆锥截线 (conic sections) 的坐标方程可以写成下述二次曲线的方程

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

因此，求解任给两个圆锥截线的交点一般来说便涉及求解四次方程，所以并不是一件容易的工作。再者，怎样求解四次方程呢？下面将会讨论用行列式来把上述问题简化为求解三次方程，因为三次方程的公式解是可以明确地写下来。

我们先讨论怎样解一般的三次方程。设 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 为任给的三次方程。先作代换 $y = x + \frac{b}{3}$，简化後得

$$y^3 + py + q = 0, \quad \text{其中} \quad p = c - \frac{b^2}{3},\ q = d + \frac{2b^3}{3^3} - \frac{bc}{3} \tag{5.61}$$

再代入

$$y = u + v, \quad -p = 3uv \tag{5.62}$$

展开後得出 $u^3 + v^3 + q = 0$。整式遍乘以 u^3，再代入假设 $-p = 3uv$ 便得出

$$(u^3)^2 + q(u^3) - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{5.63}$$

因此可用二次方程公式解写下 u^3 的解。引进复数 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$（即 $\omega^3 = 1$），便可以将 y 的解（在复数系内）明确地写下来：

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
y_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,\omega+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,\omega^2 \\
y_3 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,\omega^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,\omega
\end{aligned}
$$

下述引理就是求解圆锥截线交点的要点所在：

【引理】：设 $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$，则 $f(x,y)$ 可被分解为两个线性因式的乘积，亦即

$$f(x,y) \equiv \ell_1(x,y) \cdot \ell_2(x,y) \tag{5.64}$$

的充要条件就是

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0 \tag{5.65}$$

证明：$A = C = 0$ 的情形是容易处理的（留作习题）。现在不妨假设 $A = 1$。我们将用待定系数法寻找条件使得

$$f(x,y) \equiv (x + \alpha_1 y + \beta_1)(x + \alpha_2 y + \beta_2) \tag{5.66}$$

比较恒等式两边的 xy 和 y^2 的系数，得

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 &= 2B \\
\alpha \cdot \alpha_2 &= C
\end{aligned}
$$

由此解出 $\alpha_1 = B + \sqrt{B^2 - C}, \alpha_2 = B - \sqrt{B^2 - C}$。再比较 x 的系数和常数项，得

$$
\begin{aligned}
\beta_1 + \beta_2 &= 2D \\
\beta_1 \cdot \beta_2 &= F
\end{aligned}
$$

由此解出 $\beta_1 = D + \sqrt{D^2 - F}$, $\beta_2 = D - \sqrt{D^2 - F}$。然後比较 y 的系数得

$$\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = 2E \tag{5.67}$$

代入先前已得的 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 表达式，则

$$\begin{aligned} 2E &= \left(B+\sqrt{B^2-C}\right)\left(D-\sqrt{D^2-F}\right)+\left(B-\sqrt{B^2-C}\right)\left(D+\sqrt{D^2-F}\right) \\ &= BD - B\sqrt{D^2-F} + D\sqrt{B^2-C} - \sqrt{B^2-C}\sqrt{D^2-F} \\ &\quad + BD + B\sqrt{D^2-F} - D\sqrt{B^2-C} - \sqrt{B^2-C}\sqrt{D^2-F} \\ &= 2BD - 2\sqrt{B^2-C}\sqrt{D^2-F} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} (B^2-C)(D^2-F) &= (E-BD)^2 \\ B^2D^2 - B^2F - CD^2 + CF &= E^2 - 2BDE + B^2D^2 \\ CF + 2BDE - CD^2 - E^2 - B^2F &= 0 \end{aligned}$$

上述条件其实就是

$$\begin{vmatrix} 1 & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0 \tag{5.68}$$

□

现假设 $f_1(x,y) = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0$ 和 $f_2(x,y) = A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + 2D_2x + 2E_2y + F_2 = 0$ 为两个圆锥截线的方程，而在一般情况下它们会有四个交点，而所有过这四个交点的圆锥截线的方程（除 $f_2(x,y) = 0$ 外）可以写成

$$f_1(x,y) + kf_2(x,y) = 0$$

亦即

$$\begin{aligned} &(A_1+kA_2)x^2 + 2(B_1+kB_2)xy + (C_1+kC_2)y^2 \\ &\quad + 2(D_1+kD_2)x + 2(E_1+kE_2)y + (F_1+kF_2) = 0 \end{aligned}$$

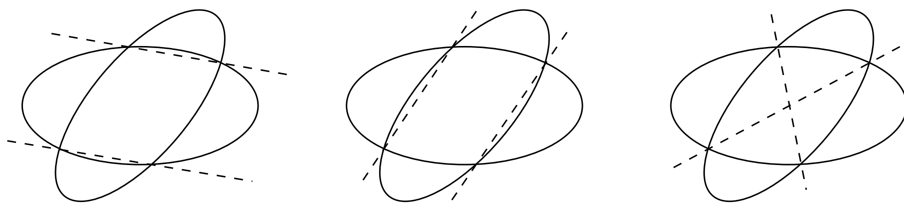
如果上述方程是代表著蜕化圆锥截线的情形，即可被分解成两个直线方程

$$\ell_1(x,y)\cdot\ell_2(x,y) = 0$$

则求交点的问题便简化成求上述两直线与圆锥截线 $f_1(x,y)=0$（或 $f_2(x,y)=0$）的交点，这是很常见易解的二次方程问题。所以，我们希望可找出适当的 k 使得该方程就是代表著蜕化圆锥截线。由刚刚所证的引理知道，k 必需满足

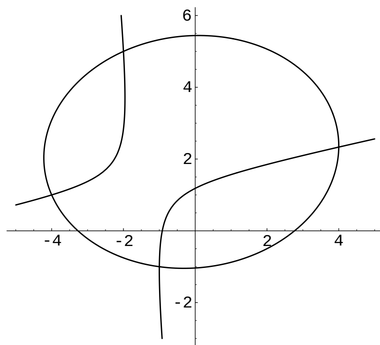
$$\begin{vmatrix} A_1+kA_2 & B_1+kB_2 & D_1+kD_2 \\ B_1+kB_2 & C_1+kC_2 & E_1+kE_2 \\ D_1+kD_2 & E_1+kE_2 & F_1+kF_2 \end{vmatrix}=0$$

这一个三次方程。运用三次方程公式解，我们求得 k 的三个值使得 $f_1(x,y)+k_1f_2(x,y)=0$、$f_1(x,y)+k_2f_2(x,y)=0$、$f_1(x,y)+k_3f_2(x,y)=0$ 都代表著蜕化圆锥截线。其实这三个情况分别就是



[图 5–6]

【例子】：令 $f_1(x,y)=86x^2-11xy+138y^2+43x-608y-778=0$（椭圆）和 $f_2(x,y)=26x^2-121xy-12y^2+233x-148y+192=0$（双曲线）为两个圆锥截线的方程，求两者的四个交点的坐标。



[图 5–7]

<u>解</u>：先求出适当的 k 使得 $f_1(x,y)+kf_2(x,y)=0$ 为蜕化圆锥截线，

亦即求解方程

$$\begin{vmatrix} A_1+kA_2 & B_1+kB_2 & D_1+kD_2 \\ B_1+kB_2 & C_1+kC_2 & E_1+kE_2 \\ D_1+kD_2 & E_1+kE_2 & F_1+kF_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 86+26k & -\frac{11}{2}-\frac{121}{2}k & \frac{43}{2}+\frac{233}{2}k \\ -\frac{11}{2}-\frac{121}{2}k & 138-12k & -304-74k \\ \frac{43}{2}+\frac{233}{2}k & -304-74k & -778+192k \end{vmatrix} = 0$$

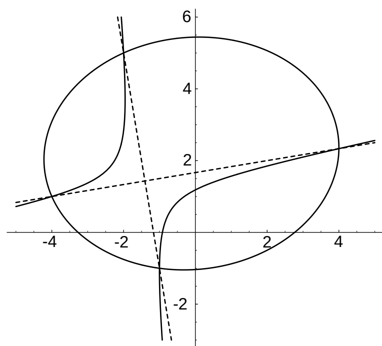
展开上述行列式，得出

$$5280(57k^3+866k^2-939k-3248)=0$$

其中一个解为 $k=-16$（另外两解为 $k=-\frac{29}{19}, k=\frac{7}{3}$）。因此，前述引理保证了 $f_1(x,y)-16f_2(x,y)$ 必可分解，亦即：

$$\begin{aligned} f_1(x,y)-16f_2(x,y) &= -55(6x^2-35xy-6y^2+67x-32y+70) \\ &= -55(x-6y+10)(6x+y+7) \end{aligned}$$

而对应的图象为



[图 5–8]

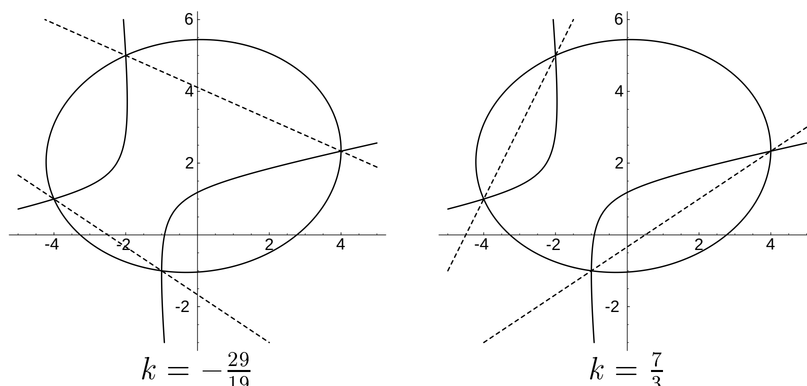
用 $f_1(x,y)=86x^2-11xy+138y^2+43x-608y-778=0$ 和 $x-6y+10=0$ 可以解出其中两个交点为

$$(-4,1), \quad (4,\frac{7}{3})$$

而用 $f_1(x,y)=0$ 和 $6x+y+7=0$ 可以解出另外两个交点为

$$(-2,5), \quad (-1,-1)$$

[注]：当 k 为 $-\frac{29}{19}$ 和 $k=\frac{7}{3}$ 时图象分别为



[图 5–9]

<u>求解四次方程</u>：

一般的四次方程可写成 $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$。把上式遍除以 x^2，然後把 x 的负指数项代入 $y=\frac{1}{x}$，即得 $x^2+\alpha x+\beta+\gamma y+\delta y^2=0$。所以，上述求解四次方程问题便转化成求解下述联立方程：

$$\begin{cases} f_1(x,y)=x^2+\delta y^2+\alpha x+\gamma y+\beta=0 \\ f_2(x,y)=xy-1=0 \end{cases}$$

亦即求解上式中的两个二次曲线的四个相交点之 x–坐标。

这样，我们可以用前述找圆锥截线交点时所引入的方法，先用行列式找出适当的 k 使得

$$f_1(x,y)+kf_2(x,y)=x^2+\delta y^2+\alpha x+\gamma y+\beta+k(xy-1)=\ell_1(x,y)\cdot\ell_2(x,y)$$

为代表蜕化二次曲线的方程，亦即

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{2} & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{k}{2} & \delta & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\gamma}{2} & \beta-k \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\big(k^3-\beta k^2+(\alpha\gamma-4\delta)k+(4\beta\delta-\alpha^2\delta-\gamma^2)\big)=0$$

然後再分别用 $\ell_1(x,y)$ 和 $xy-1=0$ 及 $\ell_2(x,y)$ 和 $xy-1=0$ 求得四个交点之 x–坐标，亦即四次方程 $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ 的四个解。

【例子】：求解 $x^4+2x^3-5x^2+6x+2=0$。

上述方程所对应的联立二次曲线方程乃是

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x + 6y - 5 = 0 \\ f_2(x,y) = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

而使得 $f_1(x,y) + kf_2(x,y)$ 为代表蜕化二次曲线方程的 k 所满足的方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{2} & 1 \\ \frac{k}{2} & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -5-k \end{vmatrix} = \frac{k^3}{4} + \frac{5k^2}{4} + k - 21 = 0$$

上述三次方程的其中一个解为 $k = 3$（另外两个解为 $k = -4 + 2\sqrt{3}i$ 和 $k = -4 - 2\sqrt{3}i$）。所以，前述引理保证了 $f_1(x,y) + 3f_2(x,y)$ 必可分解，亦即

$$\begin{aligned} f_1(x,y) + 3f_2(x,y) &= x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 6y - 8 \\ &= (x+y+4)(x+2y-2) \end{aligned}$$

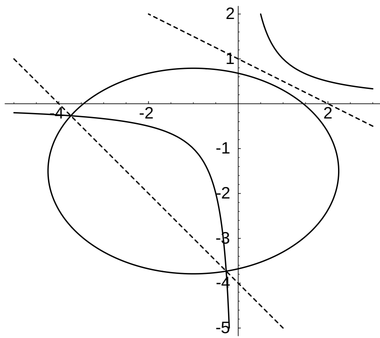
用 $x + y + 4 = 0$ 和 $xy - 1 = 0$ 可以解出其中两个交点的 x–坐标为

$$-2-\sqrt{3}, \quad -2+\sqrt{3}$$

而用 $x + 2y - 2 = 0$ 和 $xy - 1 = 0$ 可以解出另外两个交点的 x–坐标为

$$1-i, \quad 1+i$$

（即在实平面上没有交点。）



[图 5–10]

附录：
域上的线性空间与域的代数扩张

位移向量的加：$\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 和倍积：$k\cdot\mathbf{a}$ 直接反映着空间的线性结构，而且其所满足的运算律如加的交换律：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ 和倍积的分配律：$k\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\cdot\mathbf{a}+k\cdot\mathbf{b}$ 等则又能简明扼要地掌握了空间在平行和相似上的基本定理，把它们转化成简朴易用、直截了当的代数计算。这种由加和倍积结合而成的代数体系是十分好算易用。其实，所用到的计算就是用分配律展开和集项，而且这种代数又具有简朴的几何直观内涵，那就是空间的线性结构。概括地说，线性代数就是加和倍积的分配律的代数，而这种代数体系也就是空间线性结构的代数化表达形式。总之，它是融合几何和代数的精简体系，既易算好用又富有几何直观性，是数学中最为简朴而且广泛有用的精华，是基础数学重要基石所在。

I. 系数域和给定域上的向量空间

域 (field) 的概念其实就是将我们常用的数系四则运算推广至更广泛类型的代数结构。简单来说，域就是可以让我们如常进行加减乘除运算的代数结构。一个域 F 的定义可写成以下六点：

1. 存在加、乘运算（$+$ 和 $\times$），可从任给的 $a,b\in F$ 唯一地确定 $a+b\in F$ 和 $a\times b\in F$。

2. 加、乘运算满足结合律和交换律。

3. 存在 $0,1\in F$ $(0\neq 1)$ 使得对于任意 $a\in F$，有 $0+a=a$ 和 $1\cdot a=a$。

4. 对于任意 $a\in F$，存在 $-a\in F$ 使得 $a+(-a)=0$。

5. 对于任意 $a \in F, a \neq 0$，存在 a^{-1} 使得 $a \times a^{-1} = 1$。

6. 满足乘对于加的分配律：$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$。

常见常用的域有 $\mathbb{Q}$（有理数域）、$\mathbb{R}$（实数域）和 $\mathbb{C}$（复数域）；而其他常用的域有：

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$

加减乘除等同实数域的运算，即

加减法：$(a+b\sqrt{2}) \pm (c+d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2}$。

乘法：$(a+b\sqrt{2}) \cdot (c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (bc+ad)\sqrt{2}$。

值得注意是除法运算仍是「封闭」的，因除法可利用

$$(a+b\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\right) = 1$$

来定义倒数 $(a+b\sqrt{2})^{-1}$ 之後再加以定义。

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2^2} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

同样地，加减乘除等同实数域的运算。而除法是封闭的验证我们将以一个实例来表达一般做法：

如取 $\alpha = 1 + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^2}$。由于 $x^3 - 2$ 是没有有理数根，所以 $x^3 - 2$ 是在有理系数之下不可约的多项式，亦即它和 $1 + 2x - x^2$ 的最高公因式为 1。运用辗转相除法，我们求得

$$\begin{aligned} x^3 - 2 &= -(x+2)(1+2x-x^2) + 5x \\ 1 + 2x - x^2 &= \frac{2-x}{5}(5x) + 1 \end{aligned}$$

然後利用所得等式将最高公因式 1 重写成 $x^3 - 2$ 和 $1 + 2x - x^2$ 的组合：

$$\begin{aligned} 1 &= (1+2x-x^2) - \frac{2-x}{5}(5x) \\ &= (1+2x-x^2) - \frac{2-x}{5}\big((x^3-2) + (x+2)(1+2x-x^2)\big) \\ &= \big(1 - (x+2)(\frac{2-x}{5})\big)(1+2x-x^2) - \frac{2-x}{5}(x^3-2) \end{aligned}$$

代入 $x=\sqrt[3]{2}$ 得

$$1=\big(1-(\sqrt[3]{2}+2)(\frac{2-\sqrt[3]{2}}{5})\big)\alpha=\frac{1+\sqrt[3]{2^2}}{5}\alpha$$

所以 $\alpha^{-1}=\dfrac{1+\sqrt[3]{2^2}}{5}$。

【定义】：设 F 是一个给定的域。一个满足下面的加法和 F–倍积运算律的代数结构 $V=(V,+,\cdot)$ 称为一个在 F 上的向量空间，而 F 称为 V 的系数域，简写为「V/F」。即对于任给元素 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ 和 $\lambda\in F$，唯一确定元素 $\mathbf{a}+\mathbf{b}\in V$ 和 $\lambda\cdot\mathbf{a}\in V$ 并满足向量运算的基本性质：

$$\text{加：}\begin{cases}\text{结合律：}\ \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}\\ \text{交换律：}\ \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}\\ \text{可逆性：}\ \text{对于任给}\,\mathbf{a},\mathbf{b}\in V\text{，唯一存在}\,\mathbf{x}\,\text{使得}\,\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}\end{cases}$$

$$\text{倍积：}\begin{cases}1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a},\ (\lambda+\mu)\cdot\mathbf{a}=\lambda\cdot\mathbf{a}+\mu\cdot\mathbf{a},\\ \lambda\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\cdot\mathbf{a}+\lambda\cdot\mathbf{b},\\ \lambda\cdot(\mu\cdot\mathbf{a})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\mathbf{a}\end{cases}$$

【例子】：

(1) 当然，在空间内的位移向量和其加、倍积运算组成 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间。

(2) 复数域 $\mathbb{C}$ 包含实数域 $\mathbb{R}$，我们可以取其加法和其乘法中只限于 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和 $\alpha\in\mathbb{C}$ 相乘（看成倍积），则可以把 $\mathbb{C}$ 看成是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间。

(3) 设以 $F[x]$ 表示以 F 中元数为系数的单元多项式所组成的集合，则其多项式加法和其乘法中只限于 $\lambda\in F$ 和 $f(x)\in F[x]$ 的相乘（看成倍积）显然满足上述向量空间的运算律，所以也是一个 F 上的向量空间的实例。

(4) 设以 $F_n[x]$ 表示在 $F[x]$ 中次数不高于 n 的多项式集合（包括零多项式）。在多项式加法和上述局限于 $\lambda\in F$ 和 $f(x)\in F_n[x]$ 的乘法之下，$F_n[x]$ 也是一个 F 上的向量空间。

(5) 系数取值于 F 的元素的 $m\times n$–矩阵在其加法与倍积之下构成一个 F 上的向量空间。通常我们用 F^n 表示 $n\times 1$–矩阵所组成者，以 $\left(F^n\right)^*$ 表示由 $1\times n$–矩阵所组成者。

(6) 设 α 为一个在有理系数中不可约 n 次多项式的根。则

$$\mathbb{Q}(\alpha)=\{c_0+c_1\alpha+\cdots+c_{n-1}\alpha^{n-1}: c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}\in\mathbb{Q}\}$$

为 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间（其实它也是一个域）。

II. 线性组合、子空间和其生成系

向量空间所具有的「加」与「倍积」这两种运算，合称之为线性运算（所以向量空间也常常称为线性空间）。从一组给定向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 出发，重复地运用线性运算，所得的结果都是能写成下述形式的元素，即

$$\lambda_1\cdot\mathbf{a}_1+\lambda_2\cdot\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\cdot\mathbf{a}_n,\quad \lambda_i\in F,\ 1\le i\le n$$

所有能写成上述形式的元素都叫做是 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 的线性组合 (linear combination)，例如

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1&=1\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\cdots+0\cdot\mathbf{a}_n\\ \mathbf{a}_n&=0\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\cdots+1\cdot\mathbf{a}_n\\ \mathbf{x}&=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\cdots+(-1)^n\cdot\mathbf{a}_n\end{aligned}$$

等等都是 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 这一组向量的线性组合。再者，设

$$\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\mathbf{a}_i,\quad \mathbf{c}=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\cdot\mathbf{a}_i$$

则不难用向量空间的运算律得出

$$\lambda\cdot\mathbf{b}+\mu\cdot\mathbf{c}=\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\mathbf{a}_i+\mu\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu_i\cdot\mathbf{a}_i=\sum_{i=1}^{n}(\lambda\lambda_i+\mu\mu_i)\cdot\mathbf{a}_i$$

所以 $\lambda\cdot\mathbf{b}+\mu\cdot\mathbf{c}$ 对于任给 $\lambda,\mu\in F$ 都又是 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 的线性组合。

【子空间与生成系】：设 U 是向量空间 V 的一个子集，若满足条件：

$$\mathbf{a},\mathbf{b}\in U\Rightarrow\lambda\cdot\mathbf{a}+\mu\cdot\mathbf{b}\in U,\quad \text{对于任何}\ \lambda,\mu\in F\ \text{皆成立}$$

则称 U 为 V 的一个子空间 (subspace)。

再者，设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 是子空间 U 的一组元素，若 U 中任何元素都可以表成 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 的一个线性组合，则称 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ 为子空间 U 的一组生成系 (generator system)。

【例子】：

(1) $\{\mathbf{0}\}$ 和 V 本身都是 V 的子空间。

(2) 前述的不高于 n 次多项式集 $F_n[x]$ 是所有多项式集 $F[x]$ 的子空间，而 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ 则构成它的一组生成系。

(3) $\{1,i\}$ 构成 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 的一组生成系。

(4) 设有三个域 E,M,F 具有关系 $E\supset M\supset F$，则在把 E 看成 F–向量空间的观点之下，M 是 E 的子空间。如 $\mathbb{C}\supset\mathbb{R}\supset\mathbb{Q}$ 就是这样一个例子。

(5) 设 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\}\subset V$，令

$$<\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n>=\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\mathbf{a}_i;\ \lambda_i\in F\}$$

是所有 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ 的线性组合所组成的子集，则它是 V 的一个子空间，而 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ 就当然是它的一组生成系。我们称它为由 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ 所张的子空间。

设 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ 是子空间 U 的一组生成系，一个很自然的问题是：这一组生成系是否有多馀的元素可去掉？假如 $\mathbf{a}_n$ 是多馀的，即 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1}\}$ 依然是 U 的一组生成系，则 $\mathbf{a}_n$ 这个属于 U 的元素当然要能表成 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1}\}$ 的一个线性组合。反之，设 $\mathbf{a}_n$ 能表成 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1}\}$ 的线性组合，即有

$$\mathbf{a}_n=\alpha_1\cdot\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_{n-1}\cdot\mathbf{a}_{n-1},\quad \alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\in F$$

则任何 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n$ 的线性组合

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \in F$$

都可以改写成

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathbf{a}_i + \lambda_n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{a}_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_n \alpha_i) \mathbf{a}_i$$

所以 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ 就已经组成 U 的一组生成系了，亦即 $\mathbf{a}_n$ 是多馀的。

【定义】：一组向量 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 之中若有一个向量可以表达成其馀 $(n-1)$ 个向量的线性组合，则称 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 为线性相关 (linearly dependent)；反之，则称之为线性无关 (linearly independent)。

设 U 的一组生成系 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 中有可供去掉者，则称 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 为可约生成系；反之，则称之为不可约生成系。

【定理】：

(i) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 为线性相关的充要条件是存在一组不全为 0 的 $\alpha_i \in F, 1 \le i \le n$，使得 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$。

(ii) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 为线性无关的充要条件是 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ 只有在 α_i 全部为 0 的情形才成立！

(iii) 设 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 为 U 的一组生成系，则它是可约（或不可约）的充要条件是 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 线性相关（或线性无关）。

证明：上述命题中，(iii) 是定义的直接推论，而 (i) $\Rightarrow$ (ii) 也是显然的，所以我们只需证明 (i) 如下：

设 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 线性相关，即存在其中之一元素，$\mathbf{a}_{i_0}$，它是其馀 $(n-1)$ 个元素的线性组合，亦即存在 $\alpha_i \in F$，$1 \le i \le n$，$i \ne i_0$，使得

$$\mathbf{a}_{i_0} = \sum_{i \ne i_0} \alpha_i \mathbf{a}_i$$

令 $\alpha_{i_0} = -1$，即有

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i_0} = \mathbf{0}$$

其中至少有 $\alpha_{i_0} \neq 0$。反之，设有全不为 0 的 $\alpha_i \in F$，$1 \leq i \leq n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

设 $\alpha_{i_0} \neq 0$，则可将 $\alpha_{i_0} \mathbf{a}_{i_0}$ 移项，然後遍乘以 $-\dfrac{1}{a_{i_0}}$，即得

$$\alpha_{i_0} = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum_{i \neq i_0} \alpha_i \cdot \mathbf{a}_i = \sum_{i \neq i_0} \Big(-\frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} \Big) \cdot \mathbf{a}_i$$

所以 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 是线性相关的。 □

【推论】：设 $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ 线性无关，但是 $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n\}$ 则转变成线性相关，则 $\mathbf{a}_n$ 必定是一个 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}$ 的线性组合。

证明：因为 $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n\}$ 是线性相关的，所以存在著不全为 0 的 $\alpha_i \in F$，$i = 1, \cdots, n$，使得 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$，其中 α_n 必须不等于 0。要不然，即 $\alpha_n = 0$；则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 之中必有不为 0 者，而且 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{a}_i + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$，这是和假设 $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ 线性无关相矛盾的，因此 α_n 必须不为 0，即有

$$\mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \Big(-\frac{\alpha_i}{\alpha_n} \Big) \cdot \mathbf{a}_i$$

【例子】：

(1) $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 是线性无关的多项式。

(2) $g_0(x) = 1$, $g_k(x) = \dfrac{1}{k!} x(x-1) \cdots (x-k+1)$, $k = 1, 2, \cdots, n$ 也是 $(n+1)$ 个线性无关的多项式。

(3) 设 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n, f(x)\}$ 是线性相关的多项式，则 $f(x)$ 必定是一个次数不高于 n 的多项式。

(4) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 在 F^n 或 $\left(F^n\right)^*$ 中是线性无关的。

III. 基底和维数

从向量空间的代数结构来看，我们可以在一个给定的向量空间 V 中选取一个不可约生成系，以後称之为「基底」，$\{\mathbf{b}_i; 1 \leq i \leq m\}$，这样就可以把 V 中的任一元素唯一地表成 $\{\mathbf{b}_i\}$ 的线性组合，从而把 V 中的向量运算，归于线性组合的系数之间的运算，这也就是向量空间的「坐标化」。一组选定的基底也就是 V 中一个选定的坐标系，而选取坐标系（亦即基底）的好处是可以利用它来简洁地把向量空间的结构「数量化」；但是上述坐标系的选定是含有很大的「任意性」的，所以坐标系本身并非向量空间的结构的本质。因此，在采取坐标化的方法研究向量空间时，一定要牢牢记著，只有那种不依赖于特殊坐标系而取定的事物，亦即在任何坐标系中均普遍成立的事物，才是向量空间的本质性事物。例如我们将要证明的：「V 中任一基底中所含的元素个数相等」便是 V 的结构不变量，以後叫做 V 的「维数」。

【定理】：设 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 是子空间 U 的一组生成系而 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m\}$ 则是 U 中的一组线性无关向量组，则 $n \geq m$，而且存在适当的 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 中恰好含有 m 个元素的子集 A_m，使得

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m\} \cup \left(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\} \setminus A_m\right)$$

构成 U 的另一组生成系。

证明：我们将对 m 作归纳法来证明上述定理，先证 $m = 1$ 的情形。由假设，$\mathbf{b}_1$ 是 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 的一个线性组合，即

$$\mathbf{b}_1 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{a}_i$$

其中 β_i 不可能全为 0。设 $\beta_{i_1} \neq 0$，则可由上式解得

$$\mathbf{a}_{i_1} = -\frac{1}{\beta_{i_1}} \cdot \left(\sum_{i \neq i_1} \beta_i \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_1\right)$$

所以

$$\{\mathbf{b}_1\} \cup \left(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\} \setminus \{\mathbf{a}_{i_1}\}\right)$$

当然构成一组 U 的生成系，因为 U 中的任何一个元素都可以写成

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{a}_i &= \sum_{i\neq i_1}\lambda_i\mathbf{a}_i + \big(-\frac{\lambda_{i_1}}{\beta_{i_1}}\big)\big(\sum_{i\neq i_1}\beta_i\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_1\big)\\ &= \frac{\lambda_{i_1}}{\beta_{i_1}}\mathbf{b_1} + \sum_{i\neq i_1}\big(\lambda_i - \frac{\lambda_{i_1}}{\beta_{i_1}}\beta_i\big)\cdot\mathbf{a}_i\end{aligned}$$

现在再由归纳假设上述定理对于 $(m-1)$ 业已成立，进而证明定理对于 m 也成立：由 $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m\}$ 的线性无关，显然有 $\{\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m\}$ 这 $(m-1)$ 个向量也线性无关，对它运用归纳假设，即得一 $(m-1)$ 个元素的子集 $A_{m-1}=\{\mathbf{a}_{i_1},\cdots,\mathbf{a}_{i_{m-1}}\}$，使得

$$\{\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m\}\cup\big(\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\}\setminus A_{m-1}\big)$$

依然构成 U 的一组生成系，所以 $\mathbf{b}_1$ 是上述 n 个向量的线性组合，即

$$\mathbf{b}_1 = \lambda_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{b}_m + \sum_{i\neq i_1,\cdots,i_{m-1}}\mu_i\mathbf{a}_i$$

上式中的 μ_i 不可能全为 0，否则就和 $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m\}$ 是线性无关相矛盾。设 $\mu_{i_m}\neq 0$，则 $A_m = A_{m-1}\cup\{\mathbf{a}_{i_m}\}$，不难由前段对 $m=1$ 的证明看出

$$\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m\}\cup\big(\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\}\setminus A_m\big)$$

构成 U 的一组生成系。 □

【定义】：一个具有有限个元素所组成的生成系的向量空间叫做有限维向量空间。

【定义】：一个有限维向量空间 V 的一组不可约生成系叫做 V 的一组基底（亦即一组线性无关的生成系）。

【推论一】：一个有限维向量空间 V 的任给二组基底所含有的元素个数必定相同，这个相等的个数叫做 V 的维数，以 $\dim V$ 记之（若 $V=\{\mathbf{0}\}$，则定义 $\dim V=0$）。

证明：设 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ 和 $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m\}$ 是 V 的两组基底，即它们都是线性无关的生成系。由前面定理即得 $n\leq m$ 及 $m\leq n$，所以 $n=m=\dim V$。

【推论二】：设 V 为有限维，则其中任何一个线性无关向量组 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m\}$ 都可以扩充成一组 V 的基底。

<u>证明</u>：取 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ 为 V 的一组基底，则由前面定理及其推论一即得一组含有 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m\}$ 的 V 的基底。

【推论三】：设 V 为有限维的，则它的任给子空间 U 也必定是有限维的，而且 $\dim U \leq \dim V$。

<u>证明</u>：若 $U = \{\mathbf{0}\}$，则 $\dim U = 0$，推论三显然成立。不然，任取 U 中一个向量 $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$，若 $U = <\{\mathbf{b}_1\}>$，则 $\dim U = 1$，推论三依然成立。不然，即 $U \backslash <\{\mathbf{b}_1\}> \neq \phi$。任取 $\mathbf{b}_2 \in U \backslash <\{\mathbf{b}_1\}>$，则显然有

$$U \supseteq <\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}>, \quad \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \text{ 线性无关}$$

如此逐步在 U 中选取线性无关向量组，因为 $U \subseteq V$，这种线性无关向量组的所含的个数不可能比 $\dim V$ 大，所以到了某一步时，必定会出现

$$U = <\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m\}>$$

的情形，$m \leq \dim V$。

【例子】：设 α 为一个在有理系数内不可约 n 次多项式 $f(x)$ 的根，则 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha) = n = \deg f(x)$（详见第 V 节）。

IV. 线性方程组的基础理论

在第四章中，我们以 n–阶线性方程组（亦即 n 个 n 元线性方程）的唯一解问题为中心课题，经由逐阶的归纳研讨，发现了行列式，并且完满地解答了上述问题，亦即系数行列式不为零是一个 n 阶线性方程组具有唯一解的充要条件，而且其唯一解可以用行列式加以表达（即 Cramer's 公式）。但是一般线性方程组的基础理论，则有待于上述域上线性空间的基本概念和基础理论才能给以完满、系统的解答。

让我们先来研讨一般的齐线性方程组。设 $A = \left(a_{ij}\right), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$，是由 m 个 n 元线性方程所组成者的系数矩阵，$\mathbf{x}$ 是以 F^n 为其变域的向量变元。则方程组可以简约地写成

$$(*) \qquad A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

【引理 1】：令 $S=\{\mathbf{x}\in F^n, A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$ 是所有解向量所组成的集合。则 S 乃是 F^n 中的一个子空间。

证明：若 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in S, k\in F$，则有

$$
\begin{aligned}
A\cdot(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)&=A\cdot\mathbf{x}_1+A\cdot\mathbf{x}_2=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}\\
A\cdot(k\cdot\mathbf{x}_1)&=k\cdot A\cdot\mathbf{x}_1=k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

所以 $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ 和 $k\mathbf{x}_1$ 也都属于 S，亦即 S 是一个 F^n 中的子空间。 □

既然上述解向量的集合乃是一个子空间，则它有其维数 $\dim S$。所以一个自然的问题是如何确定 $\dim S$。例如当 $m=n$ 而且 $\det(A)\neq 0$ 时，S 只含有 $\mathbf{0}$（零向量），亦即 $\dim S=0$。在一般的情形，我们也要从系数矩阵的子行列式去探讨。让我们先来看一看下述特殊情形，即

$$A=\big(a_{ij}\big),\quad 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n,\ m<n$$

而且 $\det(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)\neq 0$。令 A' 是由 A 的前 m 列所构成的 $m\times m$ 方阵，并以 $x_{m+1}=1, x_j=0,\ m+1<j\leq n$ 代入方程组 $A\cdot\mathbf{x}=0$。即得

$$(*')\qquad A'\mathbf{x}'=-\mathbf{a}_{m+1},\quad \mathbf{x}'=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix}$$

由所设 $\det A'\neq 0$，即可用 Cramer's 公式解得

$$x_j^{(m+1)}=\frac{-1}{\det A'}\det(\cdots,\mathbf{a}_{m+1},\cdots),\quad 1\leq j\leq m$$

其中 $\det(\cdots,\mathbf{a}_{m+1},\cdots)$ 表示把 $\mathbf{a}_j$ 换成 $\mathbf{a}_{m+1}$ 者。由此即得

$$\mathbf{b}_1=\big(x_1^{(m+1)},\cdots,x_m^{(m+1)},1,0,\cdots,0\big)$$

乃是原给方程组 (*) 的一个解向量。同理可得 $(n-m)$ 个 (*) 的解向量，即

$$\mathbf{b}_{\ell-m}=\big(x_1^{(\ell)},\cdots,x_m^{(\ell)},0,\cdots,1,\cdots,0\big),\quad m+1\leq\ell\leq n$$

其中

$$x_j^{\ell}=\frac{-1}{\det A'}\det(\cdots,\mathbf{a}_\ell,\cdots),\quad （\mathbf{a}_\ell \text{ 在第 } j \text{ 的位置}）$$

【引理 2】：上述 $(n-m)$ 个解向量业已构成 $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解子空间 S 的一组基底（亦即线性无关的生成系）。

<u>证明</u>：上述 $\{\mathbf{b}_k, 1\le k\le n-m\}$ 显然线性无关。因为

$$\lambda_1\mathbf{b}_1+\lambda_2\mathbf{b}_2+\cdots+\lambda_{n-m}\mathbf{b}_{n-m}$$

的最後 $(n-m)$ 个分量显然就是 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-m}\}$。所以上述线性组合等于 $\mathbf{0}$ 的充要条件就当然是所有 $\{\lambda_k, 1\le k\le n-m\}$ 都是 0。

再者，设 $\mathbf{b}$ 是 S 中的任给向量。令 $\beta_{m+k}, 1\le k\le n-m$ 为 $\mathbf{b}$ 的最後 $(n-m)$ 个分量，则

$$\mathbf{b}^*=\mathbf{b}-\sum_{k=1}^{n-m}\beta_{m+k}\mathbf{b}_k\in S$$

而且 $\mathbf{b}^*$ 的最後 $(n-m)$ 个分量都等于 0。由此可见 $\mathbf{b}^*$ 的前 m 个分量所构成的 $m\times 1$ 矩阵 $\mathbf{b}'$ 满足 $A'\cdot\mathbf{b}'=\mathbf{0}$。但是 $\det A'\ne 0$，所以 $\mathbf{b}'=\mathbf{0}$。亦即 $\mathbf{b}^*=\mathbf{0}, \mathbf{b}=\sum_{k=1}^{n-m}\beta_{m+k}\mathbf{b}_k$。 □

接著，让我们再来看一下另一种特殊情形，即 $m=n, \det A=0$ 但是 $D_{n,n}\ne 0$。令 $\widetilde{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是原给方程组 $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 中略去最後一个之所得者。由前段的讨论（即 $m=n-1$ 的情形）可知 $\widetilde{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解子空间就是 $\mathbf{b}_1$ 的所有倍积，而且不难看出

$$\mathbf{b}_1=\frac{(-1)^{n+1}}{D_{n,n}}\begin{bmatrix} D_{n,1}\\ -D_{n,2}\\ D_{n,3}\\ \vdots\\ (-1)^n D_{n,n-1}\\ (-1)^{n+1}D_{n,n}\end{bmatrix}$$

是否上述 $\widetilde{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解向量也满足原给的第 n 个线性方程呢？亦即 $\overline{\mathbf{a}}_n\cdot\mathbf{b}$ 是否也等于 0 呢？直接代入即有

$$\overline{\mathbf{a}}_n\cdot\mathbf{b}_1=\frac{1}{D_{n,n}}\sum(-1)^{n+j}a_{n,j}D_{n,j}=\frac{\det A}{D_{n,n}}$$

所以由所设 $\det A=0$ 得出 $\overline{\mathbf{a}}_n\cdot\mathbf{b}_1=0$。

上述计算直截了当地证明了在所设的特殊情形，$\widetilde{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解也就是 $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解。

在矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 的 m 行 n 列中各取定其中 k 行、k 列，然後删去其馀各行、各列，则所剩者组成一个 $k\times k$ 方阵。我们把如此所得的 $k\times k$–方阵的行列式叫做 A 的一个 k–阶子行列式。

【定义】：若 A 至少具有一个不等于零的 k–阶子行列式，而 A 的所有 $(k+1)$–阶行列式都是零（或不定义），亦即 k 乃是 A 的非零子行列式的最高阶数，则称 k 为 A 的<u>秩</u> (rank of A)，以 $\mathrm{rk}(A)$ 记之。

【定理】：齐线性方程组 $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解子空间的维数等于 $n-\mathrm{rk}(A)$。

<u>证明</u>：作适当的行、行或列、列互换，不妨设 k 阶子行列式 $\left|a_{ij}\right|\neq 0$, $1\leq i,j\leq k$。令 $\widehat{A}$ 是由 A 的前 k 行所构成的 $k\times n$–矩阵。将引理 2 用到线性方程组 $\widehat{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$，可得 $\widehat{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解子空间的一组基底 $\{\mathbf{b}_j;\,1\leq j\leq n-k\}$。显然，$\widehat{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解子空间包含 $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解子空间。所以我们只要在 $m>k$ 的情形再证明每一个 $\mathbf{b}_j$ 其实也满足

$$\overline{\mathbf{a}}_i\cdot\mathbf{b}_j=0,\quad k+1\leq i\leq m\,.$$

当然，我们可以对于每个 i 逐个验证上述等式。不难看出，每次所要验证者，其实就是业已验证的特殊情形（亦即 $n=k+1$ 的情形）。 □

<u>F^n 和 $\left(F^n\right)^*$ 的对偶性与齐线性方程组：</u>

F^n 和 $\left(F^n\right)^*$ 分别是 F 上的 $n\times 1$–矩阵和 F 上 $1\times n$ 矩阵所构成的线性空间。它们的维数都等于 n，而且两者的元素可以用矩阵乘法相乘，即

$$\overline{\mathbf{a}}\in\left(F^n\right)^*,\ \mathbf{b}\in F^n,\quad \overline{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

设 $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是一个给定的齐线性方程组，$\{\overline{\mathbf{a}}_i,\,1\leq i\leq m\}$ 是 A 的 m 个行向量。令

$$U=<\overline{\mathbf{a}}_1,\cdots,\overline{\mathbf{a}}_m>$$

是其所张的子空间，而 S 则是 $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解子空间。请注意，U 和 S 分别是 $\left(F^n\right)^*$ 和 F^n 中的子空间。

【定理】：$\dim U + \dim S = n$

<u>证明</u>：令 $k = \mathrm{rk}(A)$，不妨设 $\left|a_{ij}\right|, 1 \leq i, j \leq k$ 是 A 的一个非零 k–阶子行列式。则 $\{\overline{\mathbf{a}}_i, 1 \leq i \leq k\}$ 显然线性无关，所以 $\dim U \geq k$。再者，由前述定理可知 $\dim S = n - k$，所以我们只须证明 $\dim U$ 不可能大于 k。

以前述定理中的 $\{\mathbf{b}_j, 1 \leq j \leq n-k\}$ 为列向量构成一个 $n \times (n-k)$ 矩阵 B，然後再将行列转置成一个 $(n-k) \times n$ 矩阵 B^t。因为它们的後 $(n-k)$ 列所成的方阵就是 $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$，所以 $\mathrm{rk}(B^t) = (n-k)$，因此 $B^t \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解子空间的维数是 k。再者，由

$$\overline{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{b}_j^t \cdot \overline{\mathbf{a}}_i^t = 0$$

可见 $\{\overline{\mathbf{a}}_i^t, 1 \leq i \leq m\}$ 都是 $B^t \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解向量。所以 $\{\overline{\mathbf{a}}_i^t, 1 \leq i \leq m\}$ 之中最多只有 k 个线性无关者，亦即 $\dim U \leq k$。这也就证明 $\dim U = k$,

$$\dim U + \dim S = n$$

□

【推论】：$\mathrm{rk}(A)$ 等于其行向量所张的子空间的维数，也等于其列向量所张的子空间的维数。

现在让我们进而讨论非齐次的线性方程组，亦即 $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$，的情形。不难看到，我们所要研讨的要点有二，其一是方程组 $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解的充要条件为何？其二是方程组 $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 满足有解条件者，其解向量所组成的集合如何描述？

令 $\widetilde{A}$ 是将 $m \times n$ 系数矩阵 A 再加以 $-\mathbf{b}$ 作为其第 $(n+1)$ 列的 $m \times (n+1)$–矩阵。

【定理】：方程组 $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解的充要条件是 $\mathrm{rk}(\widetilde{A}) = \mathrm{rk}(A)$。

<u>证明</u>：令 $\widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$，$S, S_0$ 和 $\widetilde{S}$ 分别是

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}, \;\text{和}\; \widetilde{A} \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

的解集。则显然有

$$A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}\Leftrightarrow\widetilde{A}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$
$$A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\widetilde{A}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\0\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

令 $(F^n,0)$ 和 $(F^n,1)$ 表示 F^{n+1} 中其第 $(n+1)$ 分量分别是 0 和 1 的子集。则上述关系可以用下述集合关系式表述之，即

$$\widetilde{S}\cap(F^n,0)=(S_0,0)$$
$$\widetilde{S}\cap(F^n,1)=(S,1)$$

由此可见，S 非空的充要条件是

$$\widetilde{S}\supsetneq\widetilde{S}\cap(F^n,0)\Leftrightarrow\dim\widetilde{S}>\dim S_0$$

再者，由前述定理

$$\dim\widetilde{S}=(n+1)-\mathrm{rk}(\widetilde{A}),$$
$$\dim S_0=n-\mathrm{rk}(A)$$

而且显然有 $\mathrm{rk}(\widetilde{A})\geq\mathrm{rk}(A)$。所以

$$S\neq\phi\Leftrightarrow\mathrm{rk}(\widetilde{A})=\mathrm{rk}(A).\qquad\square$$

【引理】：设 $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解，而 $\mathbf{x}_0$ 是其中一个解。则 $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解集可以写成 $\mathbf{x}_0+S_0$，其中 S_0 是 $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集。

<u>证明</u>：设 $A\cdot\mathbf{x}_0=\mathbf{b}$, $A\cdot\mathbf{y}=\mathbf{0}$，则有

$$A(\mathbf{x}_0+\mathbf{y})=A\cdot\mathbf{x}_0+A\cdot\mathbf{y}=\mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b}$$

反之，设 $A\cdot\mathbf{x}_0=\mathbf{b}$, $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$，则有

$$A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=A\cdot\mathbf{x}-A\cdot\mathbf{x}_0=\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{0}\qquad\square$$

V. 域的扩张与维数

【定义】：设 F 是包含在一个域 E 中的子集，而且在和 E 同一的运算下也满足域的性质，则称 F 是 E 的子域，而 E 则称为 F 的扩张域。

例如，$\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子域，$\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个扩张域；$\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个子域，$\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个扩张域，当然 $\mathbb{Q}$ 也是 $\mathbb{C}$ 的一个子域，所以 $\mathbb{C}$ 也是 $\mathbb{Q}$ 的一个扩张域。在第一节的例子中，我们已指出 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间，$\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个向量空间；同样地，当 E 是 F 的一个扩张域时，E 也是 F 上的一个向量空间（其加法和倍积其实就是 E 中域的加法和域的乘法限制在 $F \times E$ 部份）。

【定义】：设 E 是 F 的扩张域，令 $\dim_F E$ 为把 E 看成 F 上的向量空间的维数。

【定理】：设 $E \supset F$ 是 F 一个扩张域，$\alpha \in E$ 是某一个 $F[x]$ 中的 n 次不可约多项式 $f(x)$ 的根，亦即 $f(\alpha) = 0$。令 $F(\alpha)$ 是 E 中含有 $\{F$ 和 $\alpha\}$ 的最小的子域，亦即由 F 和 α 所生成的子域，则 $\dim_F F(\alpha) = n$。

证明：令

$$\left.\begin{array}{l} I(\alpha) = \{g(x) \in F[x],\ g(\alpha) = 0\} \\ m(x) \text{ 是 } I(\alpha) \text{ 中一个最低次的非零元素。} \end{array}\right\}$$

我们要先证明 (i) $m(x) = \lambda \cdot f(x)$，$\lambda \neq 0 \in F$。假若不然，则有带馀除式

$$f(x) = q(x) \cdot m(x) + r(x), \quad r(x) \neq 0,\ \deg r(x) < \deg m(x)$$

以 α 代入上式，即得

$$r(\alpha) = f(\alpha) - q(\alpha) \cdot m(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad r(x) \in I(\alpha)$$

这和 $m(x)$ 是 $I(\alpha)$ 中最低次非零元素的假设矛盾，所以 $r(x) = 0$，$q(x) = \lambda \in F$（因为 $f(x)$ 是假设为不可约的）。

(ii) $\{1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}\}$ 是 F–向量空间 E 中的线性无关向量组。假若不然，则存在一组不全为 0 的 $\lambda_i \in F$，$i = 0, 1, \cdots, n-1$，使得

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \alpha^i = 0 \ \Rightarrow\ g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x^i \in I(\alpha)$$

是和 (i) 中所证者相矛盾的。

(iii) 最後让我们来证明 $\{1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}\}$ 构成 $F(\alpha)$ 的一组生成系。换句话说，$< 1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1} >= \{\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \alpha^i;\ \lambda_i \in F\} = M$ 业已构成一个域，其证明如下：

关系式 $f(\alpha) = 0$ 就是说 α^n 可以用 $\{1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}\}$ 的线性组合表达。由此，不难归纳地证明 $\alpha^N \in M$ 对任何 N 皆成立。换句话说，M 已经在乘法之下封闭的了。再者，设

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \alpha^i \in M$$

是任给的 M 中一个非零元素，令 $g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x^i$，则显然有 $(g(x), f(x)) = 1$（即互素），所以存在有适当的多项式 $A(x), B(x)$ 使得

$$A(x) \cdot g(x) + B(x) \cdot f(x) \equiv 1$$

以 α 代入上式，即得

$$A(\alpha) \cdot g(\alpha) + B(\alpha) \cdot 0 = A(\alpha) \cdot g(\alpha) = 1$$

这也就是说 M 中的任给非零元素的倒数依然在 M 之中！ □

【定理】：设有三个域 F, M, E 具有关系

$$F \subset M \subset E, \quad \dim_F M = m,\ \dim_M E = n$$

（亦即 M 是 F 上的 m 维向量空间，E 是 M 上的 n 维向量空间）则

$$\dim_F E = m \cdot n = \dim_F M \cdot \dim_M E$$

<u>证明</u>：在 M 中取定一组 F 上基底 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，$E$ 中取定一组 M 上的基底 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$。我们要证明

$$\{a_i \cdot b_j;\ i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n\}$$

恰好构成 E 在 F 上的一组基底。先证它是一组 F 上的生成系：设 ξ 是 E 中任给元素，则有

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j, \quad \mu_j \in M$$

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} a_i, \quad \lambda_{ij} \in F$$

以第二式代入第一式，即得

$$\xi = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}(a_i \cdot b_j), \quad \lambda_{ij} \in F$$

这也就说明了 $\{a_i \cdot b_j;\ i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n\}$ 构成 E 在 F 上的一组生成系。

再者，设有线性关系

$$\sum_{i=1,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}(a_i \cdot b_j) = 0, \quad \lambda_{ij} \in F$$

则可将上式改写成

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} a_i \right) \cdot b_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} a_i \in M$$

因为 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 是在 M 上线性无关，所以对于任一 j，都有

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} a_i = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

再由 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 在 F 上的线性无关性，即得所有 λ_{ij} 都必须全部为 0，这也就证明了

$$\dim_F E = m \cdot n = \dim_F M \cdot \dim_M E$$

运用上述公式，我们就可以完满地解决在绪论中所提出的轨尺作图问题。